

جزوه درسی کنترل خطی

مراج درسی مفید :

۱- کنترل Kuo

۲- کنترل Dorf

۳- کنترل Ogata

ساخت درس :

۱- آشنایی با مفهوم کنترل حلقه باز و حلقه بسته

۲- ورودی بر تبدیل لاپلاس و فضای مربوطه

۳- توابع تبدیل سیستم های فیزیکی (الکتریکی ، مکانیکی ، سیالی ، حرارتی و ...)

۴- مدل سازی سیستم های دینامیکی

۵- ستفیرهای حالت سیستم های کنترل

۶- پایدارى سیستم های کنترل

۷- تحلیل حوزه زمانی سیستم های کنترل

۸- مکان ریشه ها

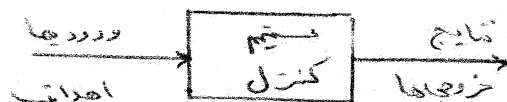
۹- تحلیل حوزه فرکانسی سیستم های کنترل

۱۰- طراحی سیستم های کنترل در حوزه زمان و حوزه فرکانس

بخشنامه ها اصلی سیستم کنترل : - ورودی ها یا سیگنالهای کارانداز

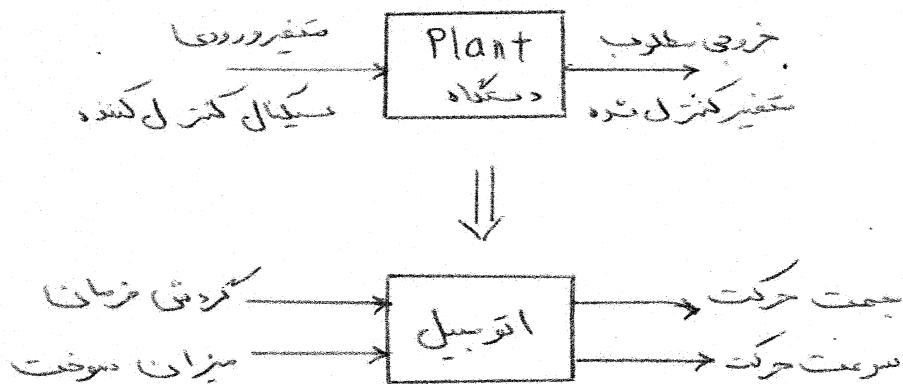
- اجزاء سیستم کنترل

- خرجها یا ستفیرهای کنترل شونده



- به طور کلی هدف سیستم کنترل عبارت از کنترل خروجی ها به روشی معین به کمک ورودی ها از طریق اجزای سیستم کنترل است.

مثال:



- در این مثال دو عامل کنترل و دو خروجی مستقل از یکدیگرند اما مطلوبی سیستم های وجود دارند که در آنها عاملهای کنترل به یکدیگر وابسته اند.

- سیستم های یک مرحله ای از یک ورودی و یک خروجی دارند سیستم های چند مرحله ای فایده می شوند.

multi input multi output $\Rightarrow$ MIMO

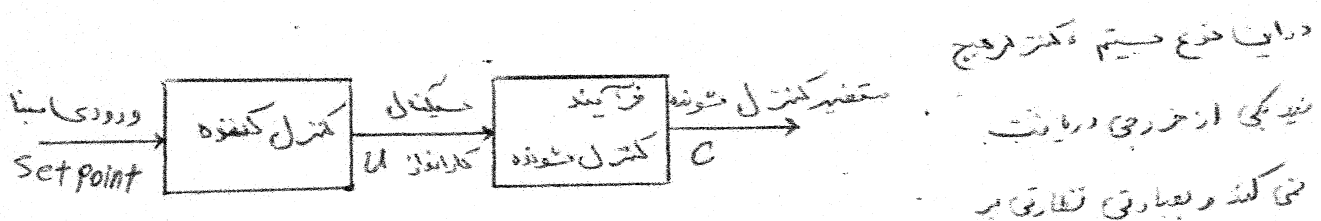
single input single output $\Rightarrow$ SISO

بحث کلی این درس پیرامون سیستم های SISO می باشد.

سیستم های کنترلی {
- حلقه باز
- حلقه بسته

سیستم کنترل حلقه باز: (سیستم های بدون فیدبک)

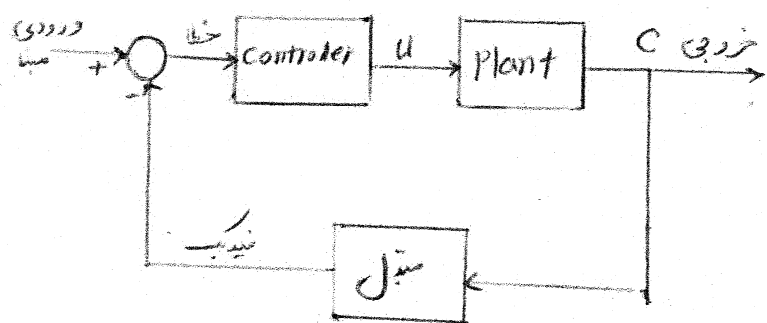
ساختار کلی یک سیستم کنترل حلقه باز به شکل زیر است:



خروجی ندارد و به عملی اگر خروجی به خروجی مطلوب نرسد نمی تواند سیگنال اصلاح کننده خروجی را ارسال نماید.

سیستم کنترل حلقه بسته :

برای اینکه عمل کنترل، دقیقتر صورت بگیرد باید سیگنال کنترل مشغول $C(+)$ به ورودی پیخورانده شود و در آنجا با ورودی مشابه یکدیگر در سیستم سیگنال کار اندازی مناسب با خطای بین خروجی مطلوب و خروجی واقعی به درون فرایند ارسال شود به گونه ای که این خطا به سمت منفی میل نماید. سیستمی که یک بازخورد مسیر فیدبک (پیچور) داشته باشد سیستم حلقه بسته نام دارد. ساختار کلی این سیستم در زیر نشان داده شده است.



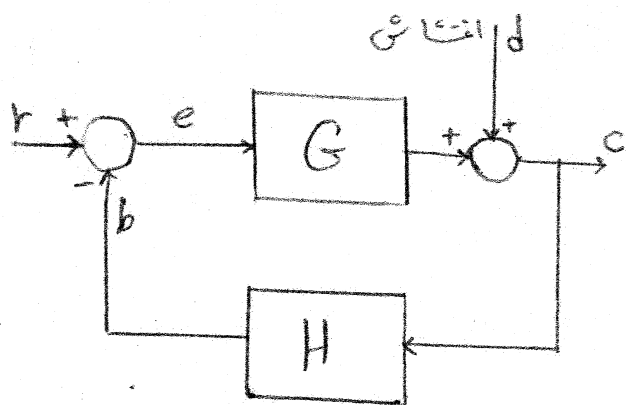
- اساس سیستم های کنترل کنترل حلقه بسته می باشد.

مزایای فیدبک :

استفاده از فیدبک در سیستم های کنترلی علاوه بر اینکه موجب کاهش خطای میان ورودی و سیگنال خروجی می گردد آثار مهم دیگری نیز در بر دارد که به شرح آن می پردازیم.

۱- افزایش یا کاهش بهره تقویت

ساختار کلی یک سیستم حلقه بسته را بصورت



و میرود در نظر بگیریم که در آن :

C : سیگنال خروجی

r : سیگنال ورودی

e : خطا

b : سیگنال فیدبک

G, H : بهره های ثابت

$$e = r - CH$$

$$C = Ge = G(r - CH) \Rightarrow C(1 + GH) = Gr$$

$$\Rightarrow \frac{C}{r} = \frac{G}{1 + GH} = M$$

تابع تبدیلی سیستم حلقه بسته: M

همچنانکه مشاهده می شود، فیدبک باعث شده بجزه سیستم با مقدار G به مقدار $\frac{G}{1+GH}$ تبدیل گردد. به عبارتی فیدبک می تواند بجزه سیستم را افزایش یا کاهش دهد. در سیستم های کنترل واقعی G و H توابعی از فرکانس اند. بنابراین مقدار $1+GH$ متغی است در گستره های از فرکانسها. بزرگتر از 1 و در بازه های دیگر کوچکتر از 1 باشد. بنابراین فیدبک می تواند بجزه سیستم را در گستره های از فرکانسها افزایش دهد گستره دیگری کاهش دهد.

نکته: در سیستم فوق چون به سیکنال فیدبک عملیات منفی اختصاص داده شده است لذا می توانیم این سیستم دارای فیدبک منفی باشد.

۲- اصلاح پایداری سیستم:

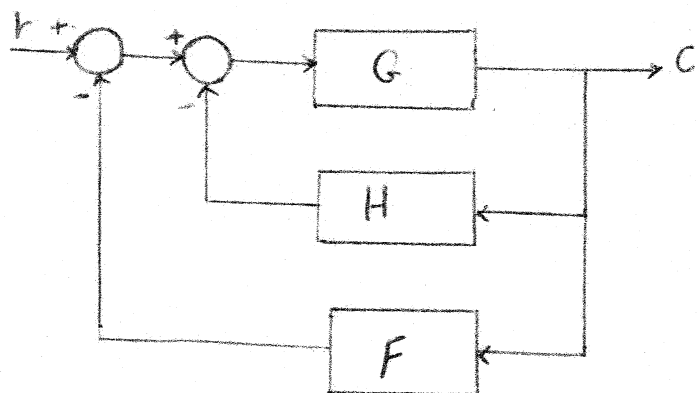
به زبان ساده می توان گفت که سیستم ناپایدار است که خروجی آن خارج از کنترل یا افزایش بدون حد داشته باشد.

به عنوان مثال در رابطه بالا چون اگر $GH = -1$ باشد آنگاه خروجی سیستم به ازای هر مقدار منفی ورودی، ناسنجی است و کونیم سیستم ناپایدار است. (دقت کنید که $GH = -1$ تقاطع ناپایداری است)

فیدبک هم می تواند یک سیستم پایدار را ناپایدار سازد و هم یک سیستم ناپایدار را پایدار نماید. یکی از مزایای هم فیدبک اینست که به کمک آن می توان یک سیستم ناپایدار را پایدار نمود. در ادامه خواهیم دید که با انتخاب مناسب H می توان قطبهای G را جابجا نمود.

به عنوان مثال ساده در همین سیستم فوق اگر $GH = -1$ باشد با استفاده از یک فیدبک مناسب K می توان

یک سیستم پایدار بدست آورد. داریم:



$$\frac{C}{r} = \frac{\frac{G}{1+GH}}{1 + \frac{GF}{1+GH}}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{r} = \frac{G}{1+GH+GF}$$

۳-۱ اثر فیدبک بر حساسیت:

عوض کنید G یک پارامتر بوده است که ممکن است تغییرات داشته باشد. حساسیت بهره کلی

سیستم یعنی M نسبت به تغییرات G عبارت از:

$$\sum_G^M = \frac{\frac{\partial M}{\partial G}}{\frac{M}{G}} = \frac{\text{درصد تغییرات } M}{\text{درصد تغییرات } G} = \frac{\partial M}{\partial G} \frac{G}{M}$$

مقدار حساسیت عموماً کوچکتر از یک است و بدین معنایست که سیستم نسبت به تغییرات پارامتر مورد نظر کمتر حساس می باشد.

برای سیستم حلقه بسته مورد بحث داریم:

$$\sum_G^M = \frac{G}{M} \frac{\partial M}{\partial G} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial G} = \frac{1+GH-GH}{(1+GH)^2} = \frac{1}{(1+GH)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_G^M = \frac{\frac{G}{G}}{\frac{1}{1+GH}} \times \frac{1}{(1+GH)^2} = \frac{1}{1+GH}$$

در حالیکه برای سیستم حلقه باز بدون فیدبک داریم:

$$\sum_G^M = \frac{G}{M} \frac{\partial M}{\partial G} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{حساسیت سیستم} \\ \text{حلقه باز بسیار} \\ \text{بالا است} \end{array}$$

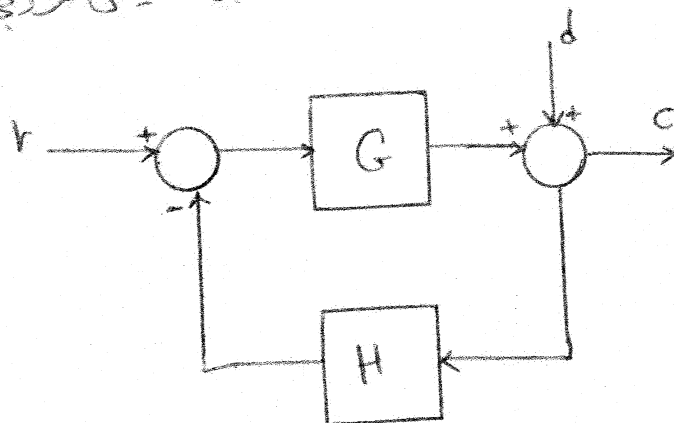


سیستم حلقه باز

$$\sum_G^M = \frac{C}{r} = G$$

ممکن است مشاهده می گردد فیدبک تراسته است برابر، حاصل سیستم را کاهش دهد.
 عبارت دیگر با توجه به رابطه حاصل سیستم حلقه بسته $\left(\frac{1}{1+GH} \right)$ درمی یابیم که چنانچه
 GH ثابت و مثبت باشد آنگاه مقدار حاصل را می توان با افزایش GH کاهش داد و لذا کوچک
 شود. البته مشروط بر آنکه سیستم پایدار باقی بماند.

ع- کاهش اثر اغتشاش بر سیگنال خروجی:



$$\left. \frac{C}{r} \right|_{d=0} = \frac{G}{1+GH}$$

$$\left. \frac{C}{d} \right|_{r=0} = \frac{1}{1+GH}$$

خروجی سیستم با فیدبک:
$$\Rightarrow C = \frac{G}{1+GH} r + \frac{1}{1+GH} d$$

خروجی سیستم بدون فیدبک:
$$C = Gr + d$$

ممکن است در رابطه خروجی سیستم حلقه بسته مشاهده می شود خروجی نامشی از نویز مثبت به حالت
 حلقه باز کاهش یافته و بر $1+GH$ تقسیم گردیده است.

- بطور کلی فیدبک بر مشخصات عملکرد سیستم نظیر هیپای پایداری، پهنای باند و پاسخ گذرا و پاسخ
 فرکانسی اثر دارد.

انواع سیستم های کنترل فیدبکی:

- سیستم های کنترل خطی و غیر خطی: سیستم های خطی در محل وجود دارد زیرا همه سیستم های واقعی تا
 حدی غیر خطی اند. سیستم های کنترل خطی موهلهای ایده آلی هستند که تحلیلگر آنها را موهلهای به ظاهر
 سهولت، تحلیل و طراحی می سازد. چنانچه مقدار سیگنالها در یک سیستم کنترل محدود
 به مقادیری شود که در گستره این مقادیر اجزاء سیستم رفتاری خطی داشته باشند، سیستم
 اساساً خطی است. اما چنانچه مقدار سیگنالها فراتر از گستره محل خطی برود بسته به
 شدت غیر خطی بودن، دیگر نباید سیستم را خطی در نظر گرفت.

- سیستم‌های متغیر بازماند و نا متغیر بازماند

مرکب بازماند سیستم کنترل در ضمن کار سیستم نسبت به زمان ثابت باشد، سیستم را سیستم نا متغیر بازماند گویند. عموماً اکثر سیستم‌های غیر مکانیکی اجزائی دارند که بازماند متغیر می‌کنند. یک نمونه از سیستم‌های متغیر بازماند، کنترل موتور هواپیما است که در آن جرم موتور با مصرف سوخت در ضمن پرواز کاهش می‌یابد.

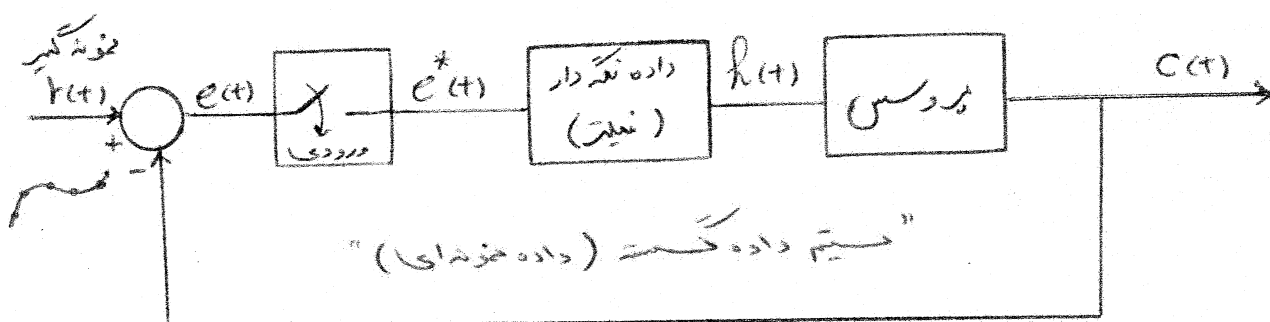
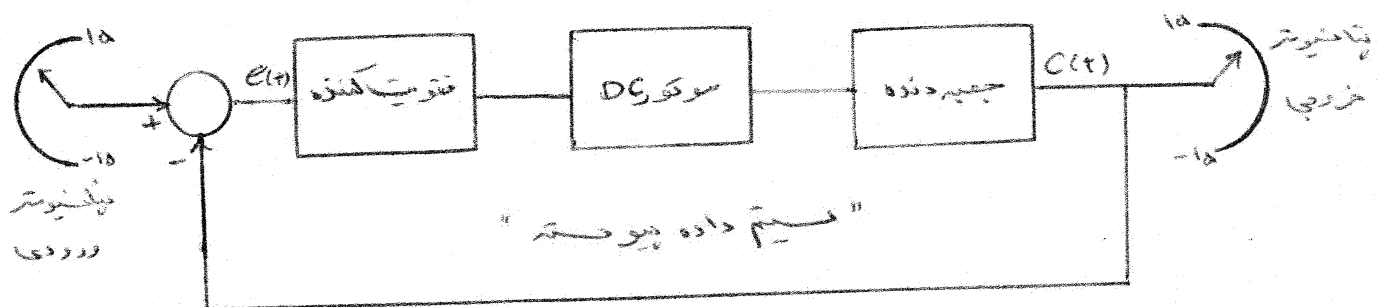
- سیستم‌های کنترل داده پیوسته

سیستم داده پیوسته سیستمی است که همه متغیراتها در تمامی بخشهای آن توانایی از متغیر پیوسته زمان t باشند. در سیستم‌های کنترل داده پیوسته متغیراتها به درجه ac و dc تقسیم می‌شوند.

- سیستم کنترل داده گسسته

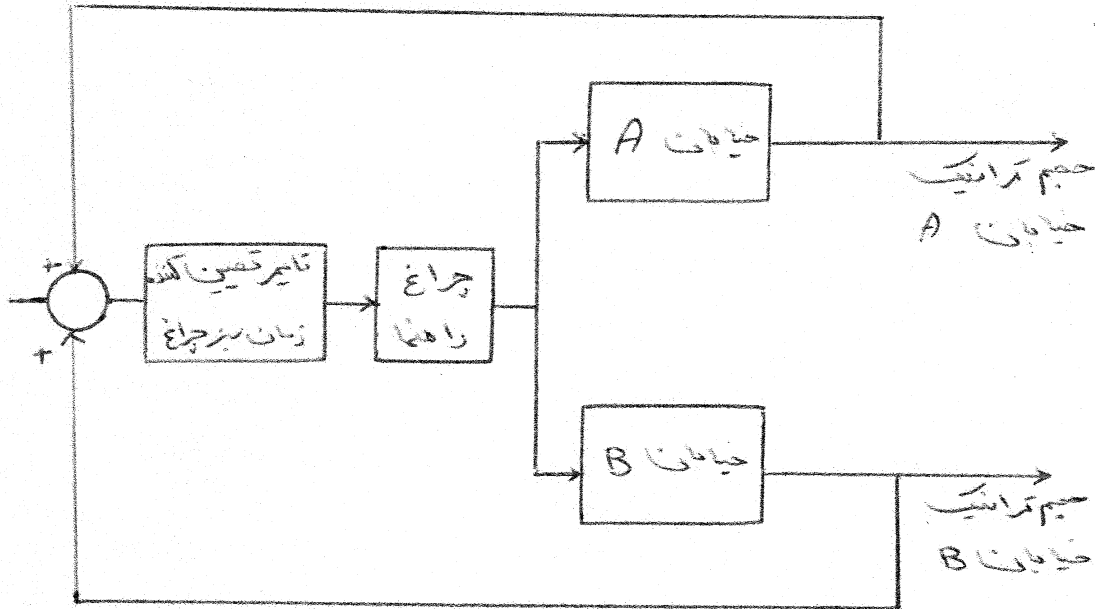
تفاوت سیستم‌های داده گسسته با سیستم‌های کنترل داده پیوسته در این است که در سیستم‌های داده گسسته متغیراتها در یک یا چند نقطه از سیستم بصورت یک مسئله پالسی یا یک عدد رقمی اند. عموماً سیستم‌های کنترل داده گسسته به درجه سیستم‌های داده پیوسته یا سیستم‌های کنترل رقمی تقسیم می‌شوند.

یکی از مشترکات سیستم‌های داده پیوسته و داده گسسته در زیر آمده است:

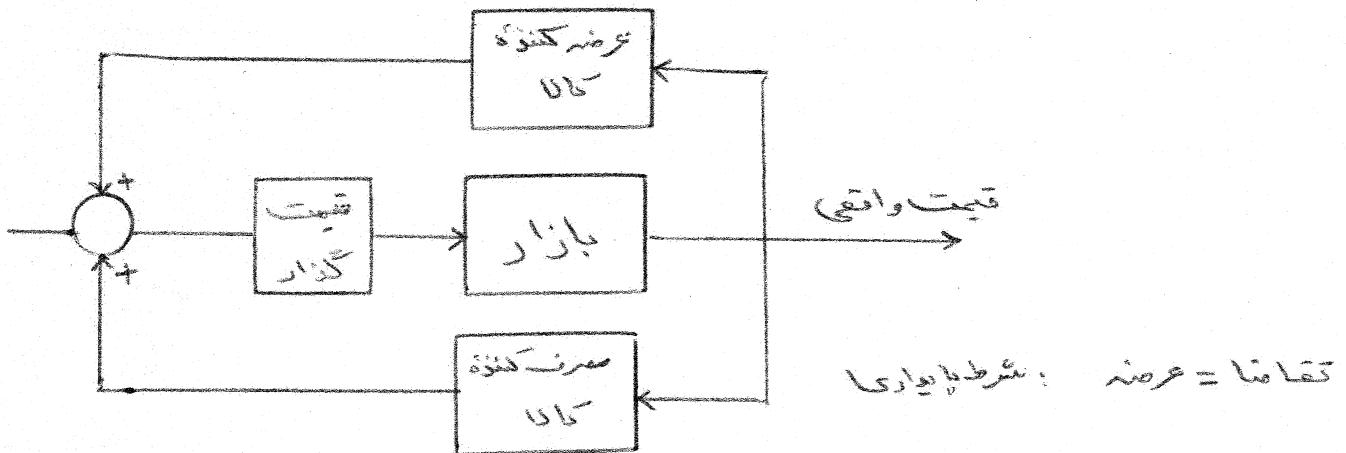


مثالهایی از سیستم‌های کنترل:

- کنترل ترافیک



- کنترل اقتصادی بازار (کنترل عرضه و تقاضا)



تقاضا = عرضه : شرط دیواری

- سیستم دیفرانسیلی

X_1 و X_2 در نوع باتری هستند که از یک ماده پیکان تقوایه پی کنند.

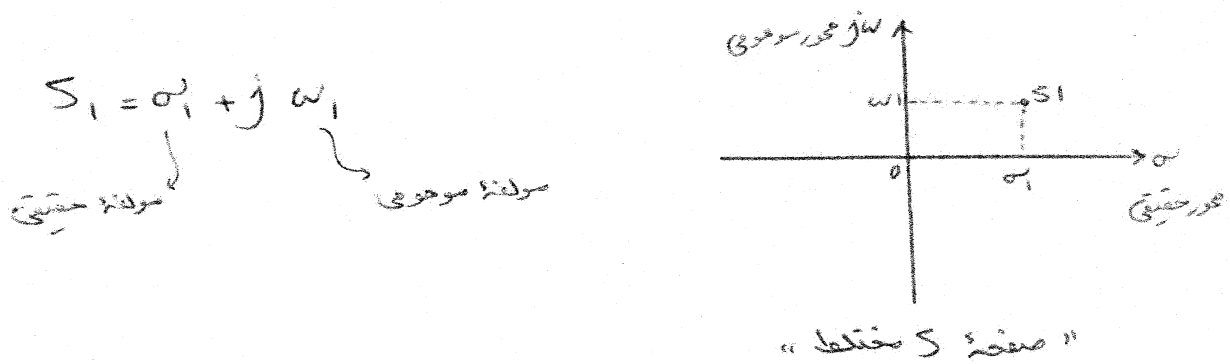
هدف تقوایه پیکان است بطوریکه جمعیت X_1 حداکثر و جمعیت X_2 حداقل شود.

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = a_{11} X_1 - a_{12} X_1 X_2 - b_1 u \\ \dot{X}_2 = a_{21} X_2 - a_{22} X_1 X_2 - b_2 u \end{cases}$$

که مستطیل کنترلی

مفهوم متغیر مختلط :

تئریه کلاسیک سیستم‌های کنترل بر کاربرد متغیرهای مختلط و توابع آنها استوار است زیرا متغیر تبدیلی لاپلاس یعنی S و متغیر تبدیلی Z یعنی z ، هر دو متغیر مختلط اند.



- تابع $G(s)$ ناهمبند از متغیر S نامیده می‌شود اگر به ازای هر مقدار S یک یا چند مقدار نظیر برای $G(s)$ وجود داشته باشد.

$$G(s) = \underbrace{\text{Re } G(s)}_{\text{تحت موهومی } G(s)} + j \underbrace{\text{Im } G(s)}_{\text{تحت حقیقی } G(s)}$$

- اگر به ازای هر مقدار S تنها

یک مقدار شناخته‌شده برای $G(s)$

وجود داشته باشد، گفته

می‌شود $G(s)$ یک تابع

تک مقدار است. تفاوت

از نقاط صفحه S به صفحه

$G(s)$ ، تفاوت تک مقدار

گفته می‌شود.

تفاوت تک مقدار از صفحه S به صفحه $G(s)$

- اگر تفاوت از صفحه $G(s)$ به صفحه S نیز تک مقدار باشد، تفاوت را یک به یک گویند.

تفاوت از S به صفحه $G(s)$ تک مقدار است اما برعکس صادق نیست زیرا:

مثال: $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

$$G(s) = \infty \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -1 \end{cases}$$

- تابع تحلیلی: تابع $G(s)$ در ناحیه‌ای از صفحه S تابعی تحلیلی نامیده می‌شود اگر تابع در همه مشتقات آن در آن ناحیه وجود داشته باشد.

در همه نقاط s تحلیلی است: $G(s) = s + 2$ مثال:

در همه نقاط طایع $s=0$ و $s=-1$ تحلیلی است: $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

- تکینه: تکینه‌ها نقای از منحنی s اند که در آنجا تابع یا مشتقاتش وجود ندارند.

- قطب: قطب مقدار کمترین تکینه است و نقشی بسیار مهمی در نظریه کلاسیک کنترل دارد.

بنابر تعریف: اگر $G(s)$ در s_i تحلیلی رتبه n داشته باشد، گوئیم قطبی از مرتبه n در s_i باشد.

$s_i = s_i$ وجود دارد چنانچه حد $\lim_{s \rightarrow s_i} [(s-s_i)^n G(s)]$ مقداری ستاهی و نامفر باشد.

بسیارست دیگر خرج $G(s)$ باید عامل $(s-s_i)^n$ را داشته باشد تا به ازای $s=s_i$ تابع معینیت نشود.

اگر $n=1$ باشد، قطب s_i را قطب ساده نامند.

مثال: $G(s) = \frac{1 \cdot (s+2)}{s(s+1)(s+3)^2} \rightarrow$ قطبها: $\begin{cases} s=0 \\ s=-1 \end{cases}$ قطب ساده
 $s=-3$: قطب مرتبه ۲

صفرهای تابع: اگر تابع $G(s)$ در $s_i = s_i$ تحلیلی باشد گوئیم صفری از مرتبه n در $s_i = s_i$ وجود دارد چنانچه حد $\lim_{s \rightarrow s_i} [(s-s_i)^n G(s)]$ مقداری ستاهی و نامفر باشد یا

به صورت ساده $G(s)$ صفری از مرتبه n در $s_i = s_i$ دارد اگر $\frac{1}{G(s)}$ قطبی از مرتبه n در $s_i = s_i$ داشته باشد.

در صورت ساده $G(s)$ صفری از مرتبه n در $s_i = s_i$ دارد اگر $\frac{1}{G(s)}$ قطبی از مرتبه n در $s_i = s_i$ داشته باشد.

- اگر تابع صفری از مرتبه n باشد آنگاه مقدار کلی قطبها و صفرها با هم برابرند به شرط آنکه قطبها و صفرها با مرتبه چندگانه و نیز قطبها و صفرهای در ∞ حساب آیند.

مثال: $G(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow$ قطبها $\begin{cases} -4 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$ صفرها $\begin{cases} -4 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{cases} \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} = 0$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_{m+1} s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1}$$

$$C(s) = G(s) R(s)$$

توجه:

- ۱- تابع تبدیلی فقط برای سیستم‌های مستقیم‌رسان خلی تعریف می‌شود.
- ۲- تابع تبدیلی، تبدیلی لاپلاسی با سطح ضرب یا ضرایب نسبتاً ضرایب تبدیلی لاپلاسی خروجی به ضرایب تبدیلی لاپلاسی ورودی است.
- ۳- همه شرایط اولیه سفر در نظر گرفته می‌شوند.
- ۴- تابع تبدیلی به ورودی سیستم بستگی ندارد.
- ۵- تابع تبدیلی یک سیستم پیوسته تنها به صورت مابقی از متغیر مختلط s بیان می‌شود و مابقی از متغیر ورودی، زمانی، یا هر متغیری که به عنوان متغیر مستقل به کار می‌آورد، نیست.
- در سیستم‌های داده-گرفته بجای معادله دیفرانسیل، معادلات تفاضلی وجود دارد و بجای تبدیلی لاپلاسی از تبدیلی z استفاده می‌شود.

معادله مشخصه، معادله مشخصه یک سیستم خلی عبارتست از معادله‌ای که از سفر قراردادن چند جمله‌ای مزج تابع تبدیلی بدست می‌آید.

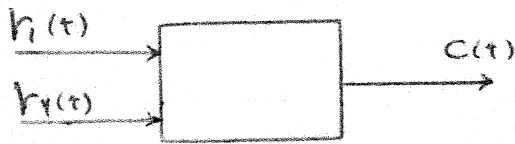
$$\text{معادله مشخصه: } s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 = 0$$

در آینده خواهیم دید که در سیستم‌های SISO، پایداری سیستم کاملاً بستگی به ریشه‌های معادله مشخصه

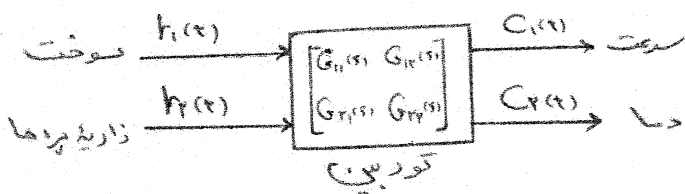
دارد. **وقتی طریقه‌های سیستم همی فاشی باشد سیستم نوسانی است**
تابع تبدیلی (سیستم‌های MIMO):

سیستم چند متغیره یک سیستم چند ورودی - چند خروجی است. بیان فرجیت از ورودی ماز خروجی یک سیستم یک معادله دیفرانسیل مشابه بخشی قبل موجود است که مباحثی می‌توانیم تابع تبدیلی بین آن‌ها ورودی و خروجی را بدست بیاوریم. دقت کنید که هنگام کار با رابطه

بیان یک ورودی و خروجی، فرض می‌کنیم سایر ورودی‌ها صفر اند. چون اصل جمع آثار در مورد سیستم‌های خطی معتبر است. خروجی کلی ناشی از ورودی‌های چندگانه عبارتست از جمع کردن خروجی‌های ناشی از اعمال هر یک از ورودی‌ها.



$$C(s) = G_{11}(s) R_1(s) + G_{12}(s) R_2(s)$$



$$C_1(s) = G_{11}(s) R_1(s) + G_{12}(s) R_2(s)$$

$$C_2(s) = G_{21}(s) R_1(s) + G_{22}(s) R_2(s)$$

مطلوبه‌ای حیاتی سیستم خطی P ورودی و q خروجی داشته باشد، تابع تبدیل بیان ورودی و آمار خروجی را عبارت از:

$$\begin{cases} G_{ij}(s) = \frac{C_i(s)}{R_j(s)} \\ R_k(s) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, P \quad k \neq j \end{cases}$$

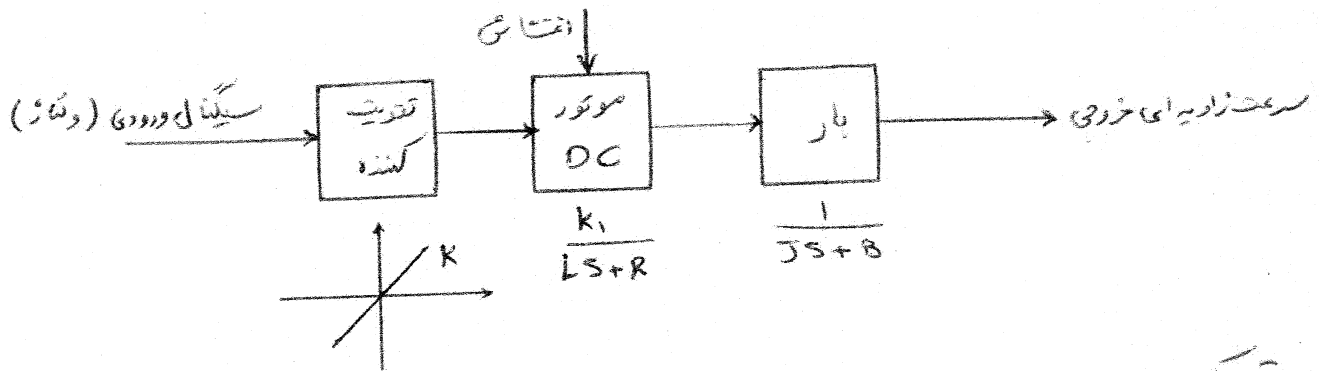
$$C_i(s) = G_{i1}(s) R_1(s) + G_{i2}(s) R_2(s) + \dots + G_{ip}(s) R_p(s)$$

$$= \sum_{j=1}^p G_{ij}(s) R_j(s) \quad i = 1, 2, \dots, q$$

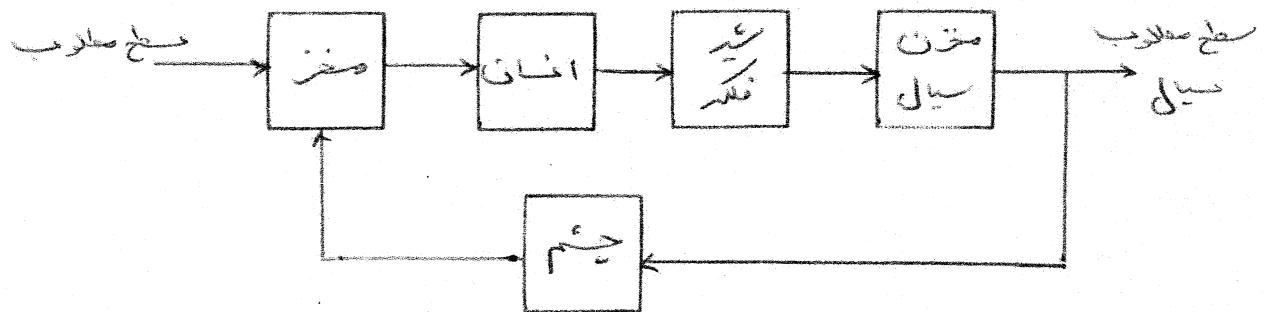
$$C(s) = G(s) R(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \\ \vdots \\ C_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \dots & G_{qp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_p(s) \end{bmatrix}$$

دیگراهای بلوکی :

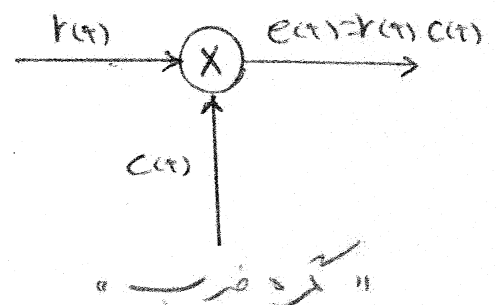
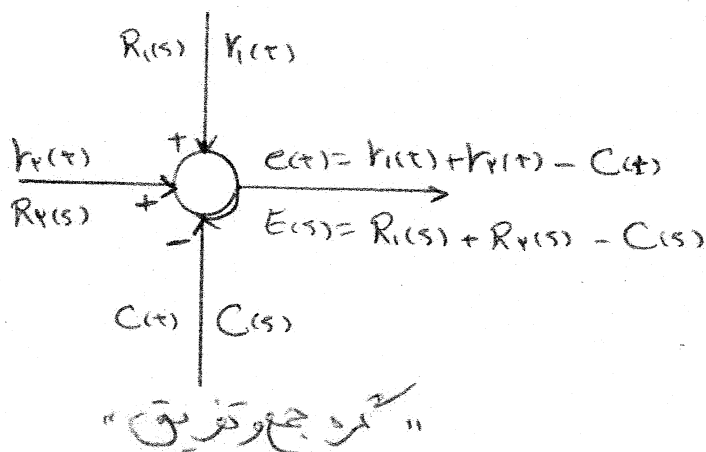
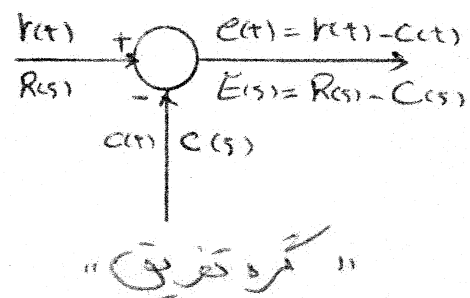
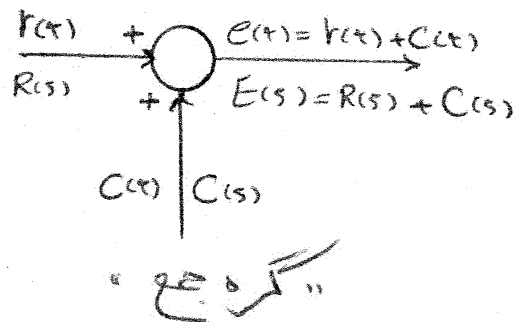
فوی توصیف سیستمی است که روابط ورودی و خروجی را بصورت نمایان تر مشخص می کند.



سیستم کنترل سطح سیال :



اجزاء دیگراهای بلوکی :



دقت کنید که عملیات جمع و تفریق خطی اند و لذا مستطیرهای ورودی و خروجی این اجزاء خوداربطولی می‌توانند مستطیرهایی در حوزه زمان یا مستطیرهای تبدیلی را پلاسی یا کنند. داریم:

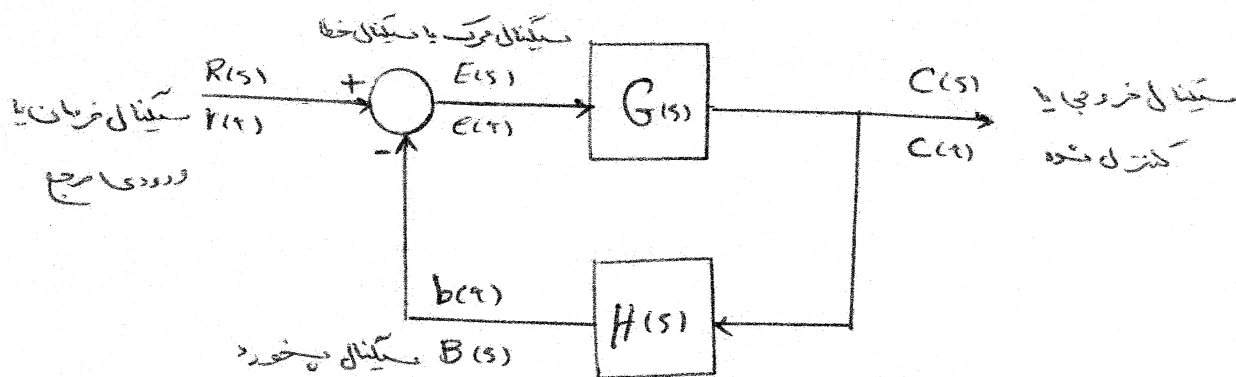
$$e(t) = r(t) - c(t) \Rightarrow E(s) = R(s) - C(s)$$

اما محل ضرب غیرخطی است بنابراین رابطه ورودی و خروجی آن تنها در حوزه حقیقی (زمان) صدق دارد است:

$$e(t) = r(t) - c(t) \Rightarrow E(s) \neq R(s) - C(s)$$

$$\rightarrow E(s) = R(s) * C(s)$$

که کافرونش مختلفا



$G(s)$: تابع تبدیلی مسیر مستقیم

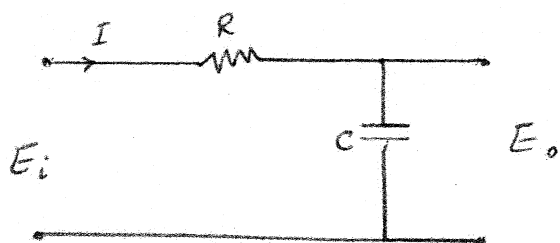
$H(s)$: تابع تبدیلی پیخورد

$G(s)H(s)$: تابع تبدیلی حلقه باز یا حلقه

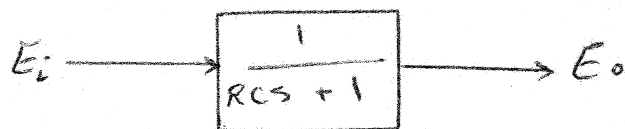
$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$: تابع تبدیلی حلقه بسته

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - B(s) \\ B(s) = H(s)C(s) \\ C(s) = E(s)G(s) \end{cases} \Rightarrow C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

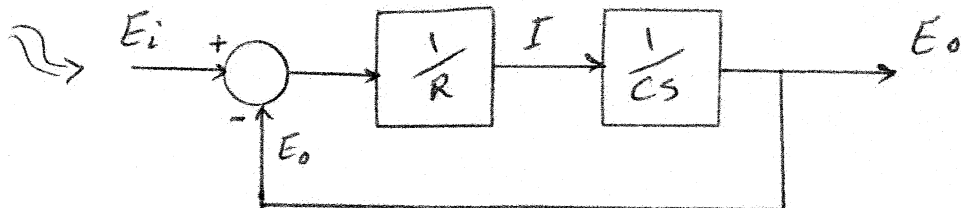
$$\Rightarrow M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{C(s)}{R(s)}$$



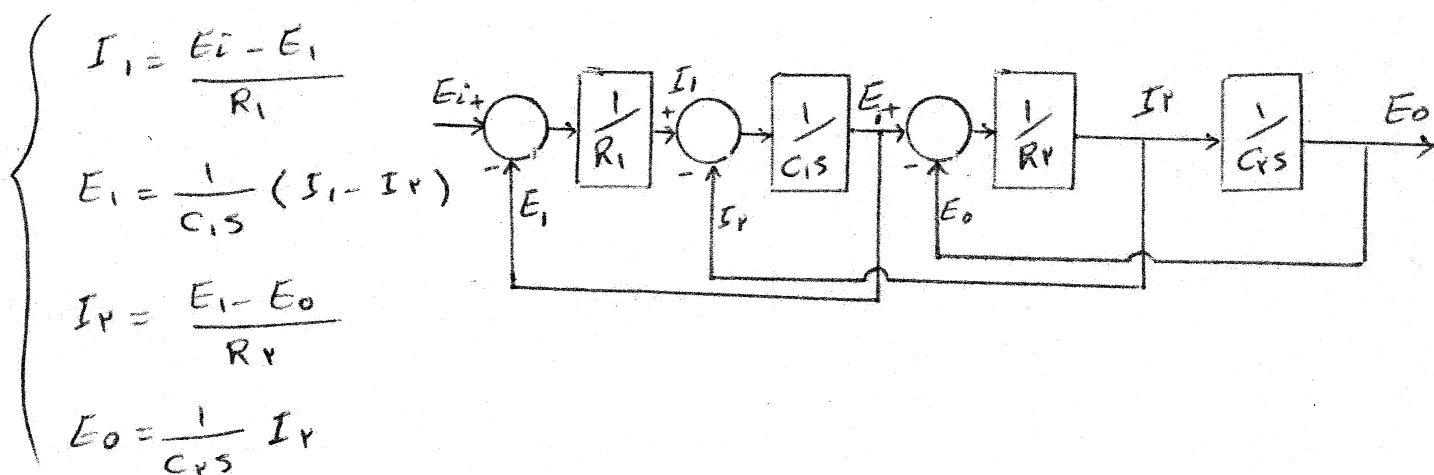
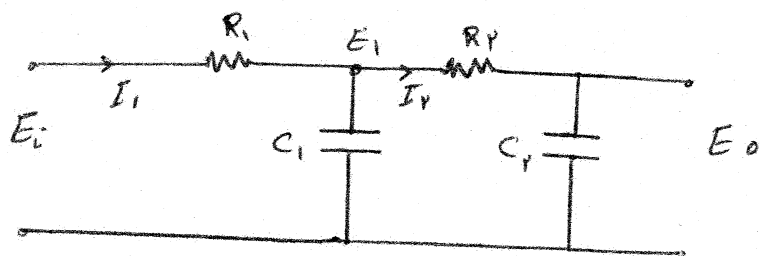
$$E_o = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} E_i = \frac{1}{RCS + 1} E_i$$



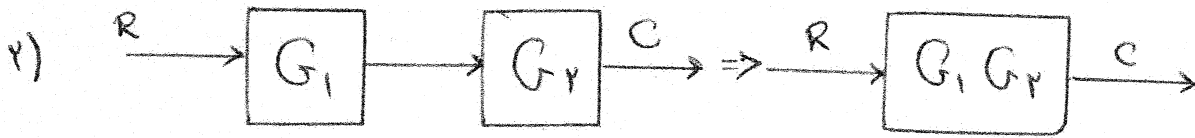
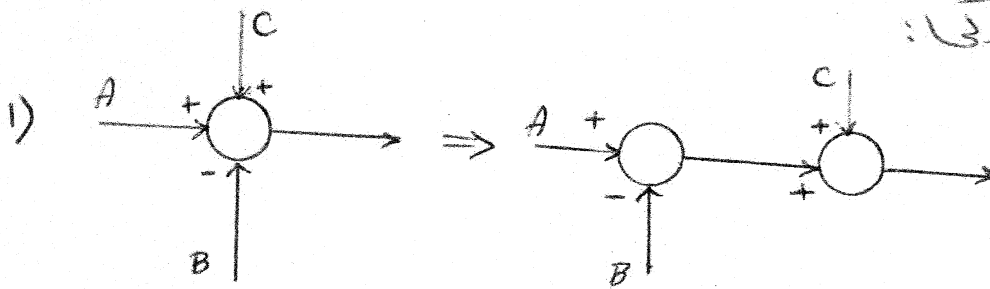
$$\left\{ \begin{aligned} I &= \frac{E_i - E_o}{R} \\ E_o &= \frac{1}{Cs} I \end{aligned} \right.$$



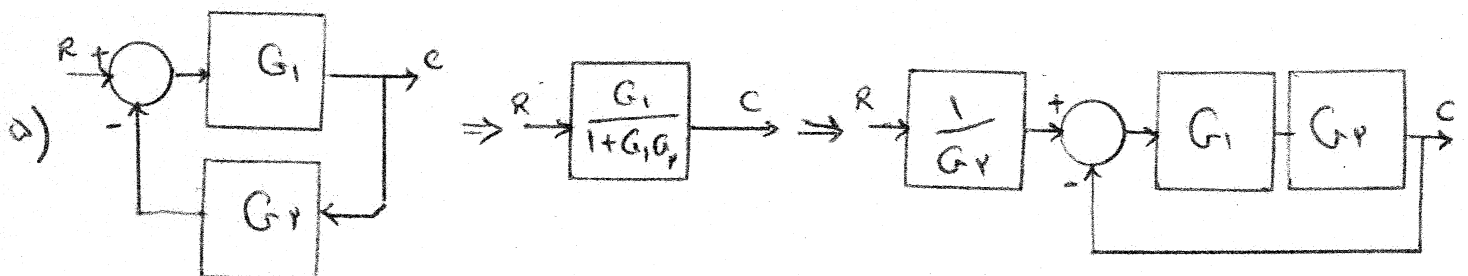
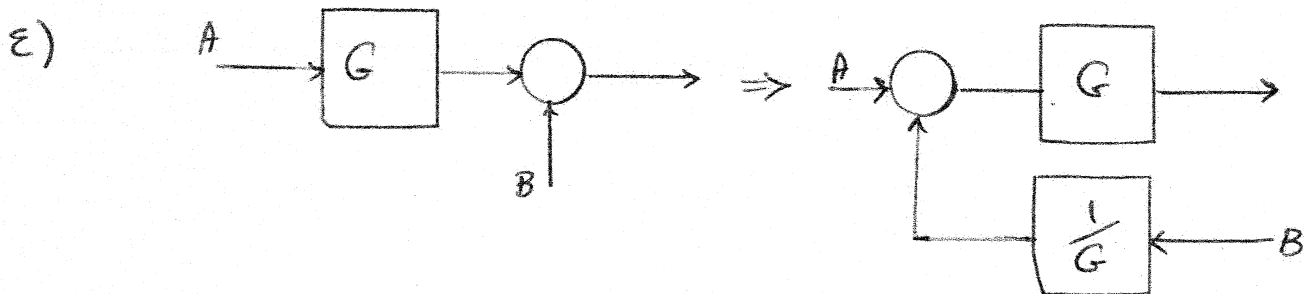
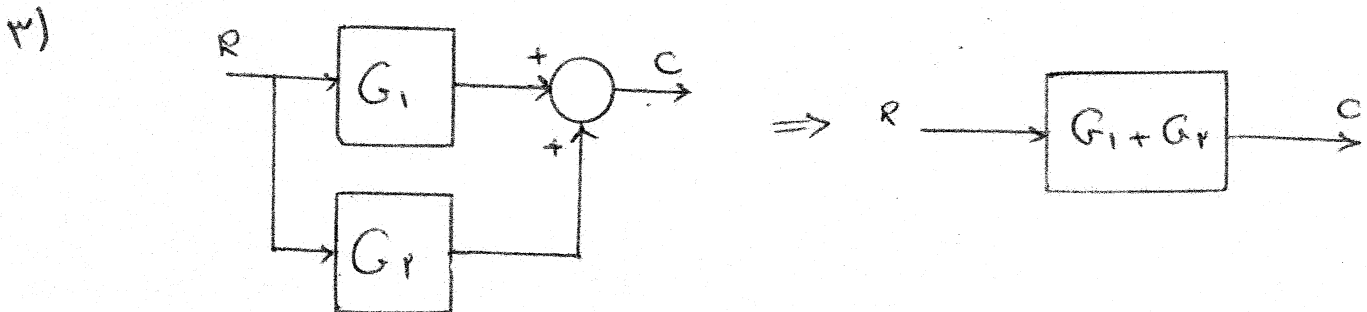
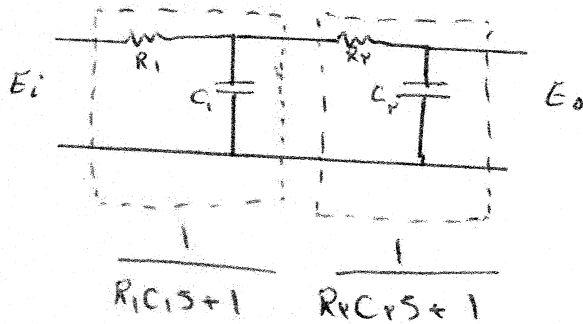
$$\left\{ \begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{RCS} \\ H(s) &= 1 \end{aligned} \right. \Rightarrow M(s) = \frac{1}{1 + RCS}$$



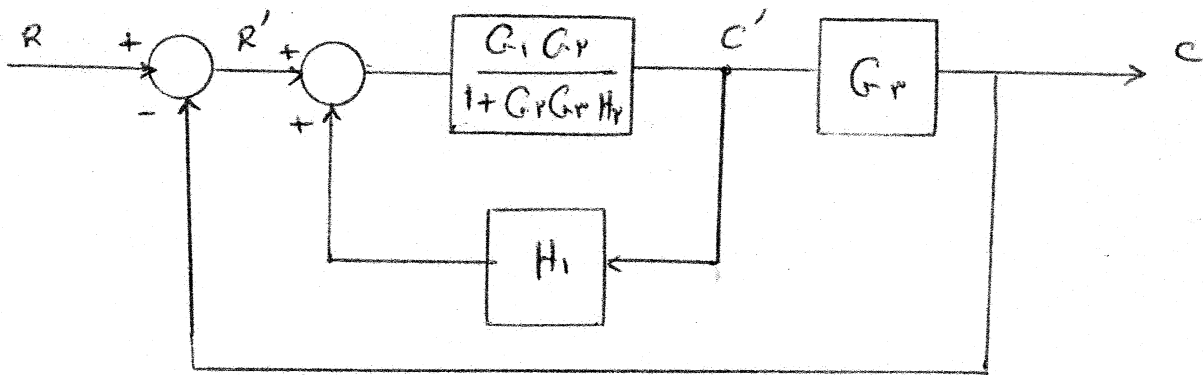
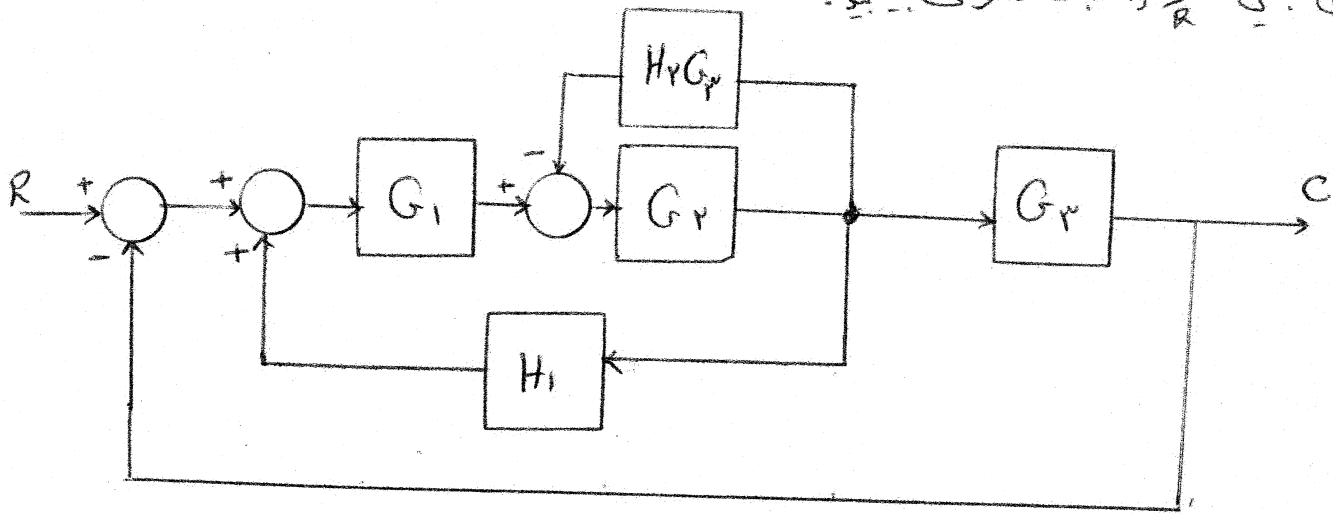
قواعد جبر دیاگرامهای بلوکی:



شرط: عمل فوق در صورتی امکان پذیر است که G_2 هیچ اثر بارستگی بر G_1 نداشته باشد.
 ابتدا در سادگی توان دو تابع را در هم ضرب نمود. (بدلی اثر بارستگی loading):



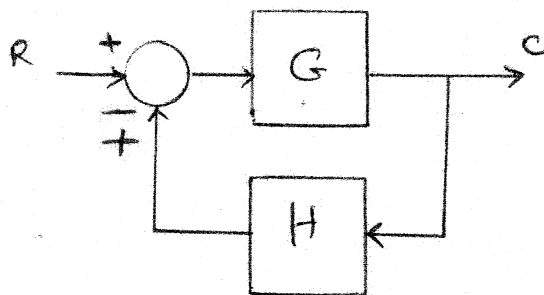
مثال: تابع تبدیلی $\frac{C}{R}$ را با استفاده از روش بلوک-پیکان بیابید.



$$\frac{C'}{R'} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_2 H_2} = \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_2 H_2}$$

$$1 - \frac{G_1 G_2 H_1}{1 + G_2 G_2 H_2}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_2 H_2} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_2 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$



$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

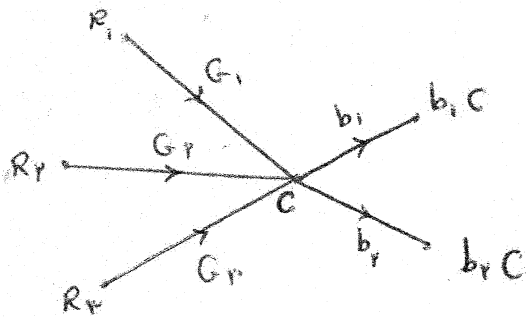
نتیجه:

گرافهای گذر سیگنال (SFG) (Signal Flow Graph)



$$C = RG$$

- شکل دو ورودی و یک خروجی ساده
گین یا بلوک G می باشد.
- تلفظی روی ساده، جهت گذر سیگنال را نشان می دهد.



- شکل دو ورودی و یک خروجی و یک برگرد
گراف گذر سیگنال می باشد.

$$C = R_1 G_1 + R_2 G_2 + R_3 G_3$$

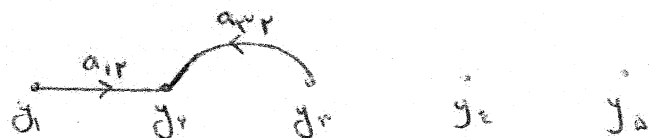
مثال: ضوابط مثالی در مورد رسم نمودار گذر سیگنال، دستاورد معادلات جبر خطی را در نظر بگیرید، داریم:

$$y_2 = a_{12} y_1 + a_{32} y_3$$

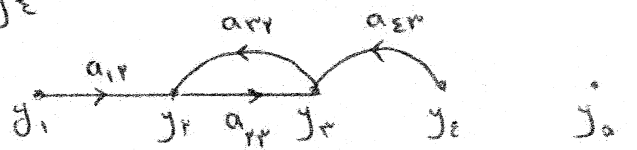
$$y_3 = a_{23} y_2 + a_{43} y_4$$

$$y_4 = a_{24} y_2 + a_{34} y_3 + a_{44} y_4$$

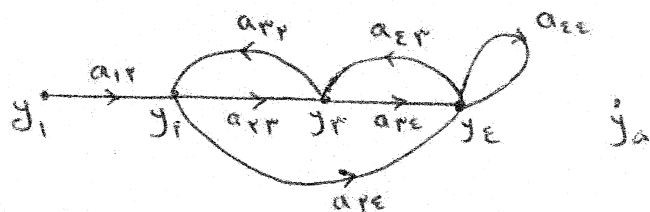
$$y_5 = a_{25} y_2 + a_{45} y_4$$



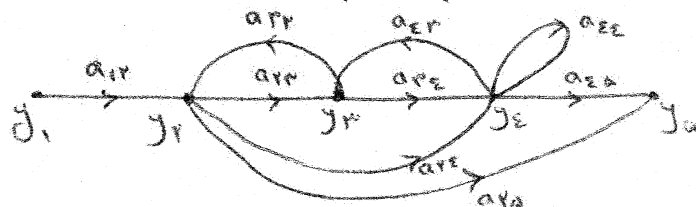
"ایجاد رابطه اول"



"ایجاد رابطه دوم"



"ایجاد رابطه سوم"

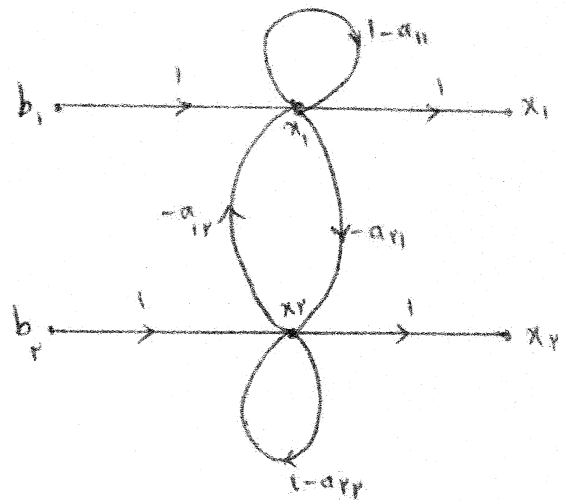


← ایجاد رابطه چهارم

مثال: دو معادله - درجه اول

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 + b_1 \\ x_2 = -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 + b_2 \end{cases}$$



خواص اصلی نمودار گذر سگینال:

- ۱- نمودار گذر سگینال تنها در مورد سیستم های خطی بکار میرود.
- ۲- معادلاتی که از روی آنها نمودار گذر سگینال رسم می شود باید معادلاتی بصورت جبری و بصورت سطوح ها یا تابع خطی باشند.
- ۳- متغیرها را بگردد نشان می دهیم. بگردد ما محور از چپ به راست و بسته به تعدادی متغیر و سطوح در سیستم مرتب می شوند.
- ۴- سگینالها بر روی شاخه ها و تنها در جهت سگینالها مشخص شده عبور می کنند.
- ۵- شاخه ها که از گره k به سوی گره i کشیده می شود را سگینال i به سگینال k و نه برعکس آن را نشان می دهد.
- ۶- سگینال k که از شاخه بین گره های k و i عبور می کند درجه شاخه ضرب می شود و به این ترتیب در گره i سگینال $a_{ki}y_k$ ظاهر می شود.

تعاریف نمودار گذر سگینال:

- گره منبع (گره ورودی: Source Node): گرهی است که تنها یک شاخه از آن خارج می شود یا عبارت دیگر گرهی است که شاخه های آن خارج شونده باشند.
- گره مقصد (گره خروجی: Sink Node): گرهی است که تنها یک شاخه به آن وارد می شود و عبارت دیگر گرهی است که تمام شاخه های آن ورودی باشند.

- همواره محاسبات برای هر گره، گره دیگری یا جره واحد وصل کرد و گره Sink ایجاد نمود. (لکن به این طریق نمی توان کرد و روی ایجاد نمود.)

مسیره: مجموعه ای از چند شاخه است که در یک جهت طی شود. این تعریف کلی است و لذا اضافی ندارد که عبور از یک گره بیش از یکبار نباشد.

مسیره مستقیم: مسیری است که از یک گره ورودی آغاز شود و به یک گره خروجی پایان پذیرد و در طول آن عبور از هر گرهی بیش از یکبار نباشد.

حلقه: مسیری است که گره آغاز و پایان آن یکی است و در طول آن هیچ گرهی بیش از یک بار برخورد نکند.

جره مسیره: حاصل ضرب جره های شاخه هایی که در طی مسیره با آنجا مواجه می شویم جره مسیره نام دارد.

جره مسیره مستقیم: جره مسیره مستقیم، جره مسیره مستقیم است.

جره حلقه: جره حلقه جره مسیره حلقه است.

حلقه های غیر تماس (Non-touching): حلقه هایی را غیر تماس گویند که هیچ گره مشترکی نداشته باشند.

فرمول کین مسیوت (Mason): هدف، پیدا کردن تابع تبدیل میان گره منبع و گره مقصد است.

$$T(s) = \frac{\sum_{k=1}^N P_k \cdot \Delta_k}{\Delta} = \frac{J_{out}}{J_{in}}$$

J_{in} : متغیر گره ورودی

J_{out} : متغیر گره خروجی

T : جره بین J_{in} و J_{out}

N : کل تعداد مسیره های مستقیم

بین J_{in} و J_{out}

P_k : جره مسیره P_k از منبع به مقصد

$$\Delta = 1 - \sum_{\text{حلقه ها}} L_a + \sum_{\text{غیر حلقه ها}} a_a L_b - \sum_{\text{غیر حلقه ها}} a_a a_b L_c + \dots$$

$$\Delta = 1 - \left[\begin{array}{c} \text{مجموع حلقه های بهره های} \\ \text{یکایک حلقه ها} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{مجموع حاصلضربهای بهره های} \\ \text{همه ترکیبات ممکن هر دو حلقه} \\ \text{برای} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{مجموع حاصلضربهای بهره های} \\ \text{همه ترکیبات ممکن هر سه حلقه} \\ \text{برای} \end{array} \right] + \dots$$

Δ_k همان Δ است که در آن حلقه های حساس با P_k حذف شده اند.

مثال: خود را در یک مدار دو عدد در سطح ۲۰ را در نظر بگیرید داریم:

$$\Delta = 1 - (1 - a_{11} + 1 - a_{rr} + a_{1r} a_{r1}) + ((1 - a_{11})(1 - a_{rr})) = a_{11} a_{rr} - a_{1r} a_{r1}$$

$$\text{حلقه های تک} \begin{cases} 1 - a_{11} \\ (-a_{1r})(-a_{r1}) = a_{1r} a_{r1} \\ 1 - a_{rr} \end{cases}$$

$$\text{حلقه های ۲۲} \begin{cases} (1 - a_{11})(1 - a_{rr}) \\ \text{برای} \end{cases}$$

$$X_1 = b_1, P_1 = 1$$

$$\Delta_1 = 1 - (1 - a_{rr}) = a_{rr}$$

$$X_r = b_r, P_r = -a_{1r}$$

$$\Delta_r = 1$$

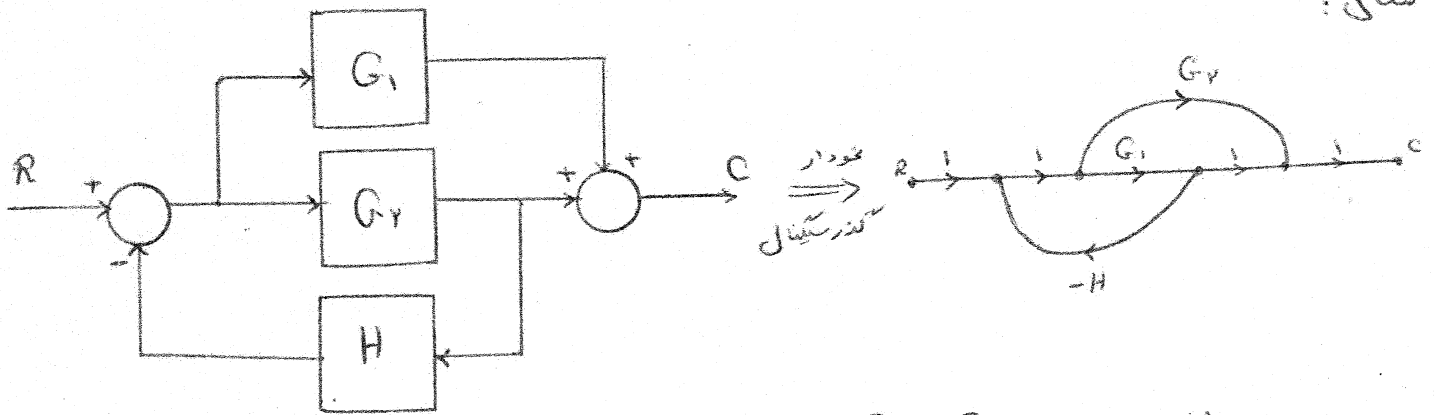
$$\Rightarrow X_1 = \frac{a_{rr}}{a_{11} a_{rr} - a_{1r} a_{r1}} b_1 + \frac{-a_{1r}}{a_{11} a_{rr} - a_{1r} a_{r1}} b_r$$

$$X_r = b_r, P_r = -a_{r1}, \Delta_r = 1$$

$$X_1 = b_1, P_1 = 1, \Delta_1 = 1 - (1 - a_{11}) = a_{11}$$

$$X_r = \frac{-a_{r1}}{a_{11} a_{rr} - a_{1r} a_{r1}} b_1 + \frac{a_{11}}{a_{11} a_{rr} - a_{1r} a_{r1}} b_r$$

ست:



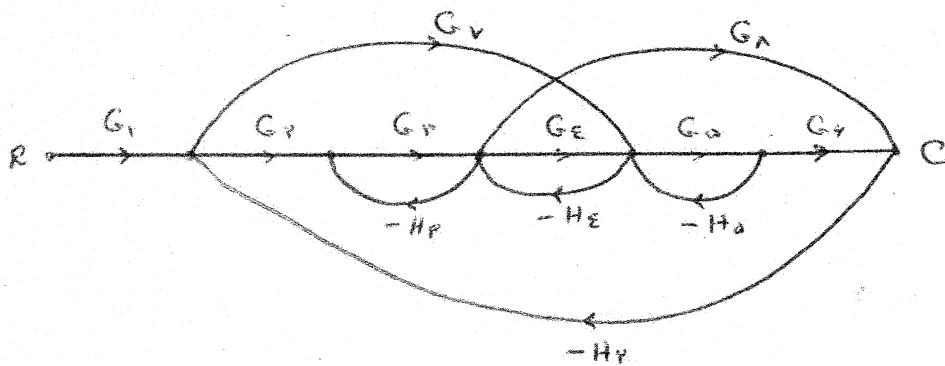
C.R: ~~فرض~~ $P_1 = G_1$, $\Delta_1 = 1$

$C_R = R$ ~~مساوی~~ $P_r = G_r$, $\Delta r = 1$

فرض $L_1 = -G_1 H_1$

$$\Delta = 1 + G_1 H_1$$

$$\Rightarrow \frac{C}{R} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 H_1}$$



104

$$P_1 = G_1 G_r G_{rr} G_z G_a G_y$$

$$L_1 = -G_r G_r G_z G_a G_s H_r$$

$$P_r = G_1 G_v G_a G_f$$

$$L_v = -G_v H_v$$

$$P_r = G_1 G_r G_r G_n$$

$$L_{\nu} = -G_0 H_0$$

$$P_E = -G_1 G_V H_E G_A$$

$$L_E = -G_F G_W G_A H_F$$

$$L_9 = -G \varepsilon H \varepsilon$$

$$L_a = -G_y G_a G_y H_r$$

$$L_V = +G_V H_E G_A H_V$$

$\Delta = 1$

$$\Delta r = 1 - Lr$$

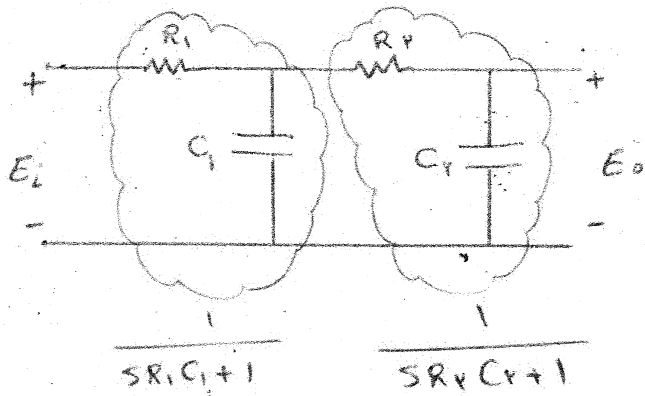
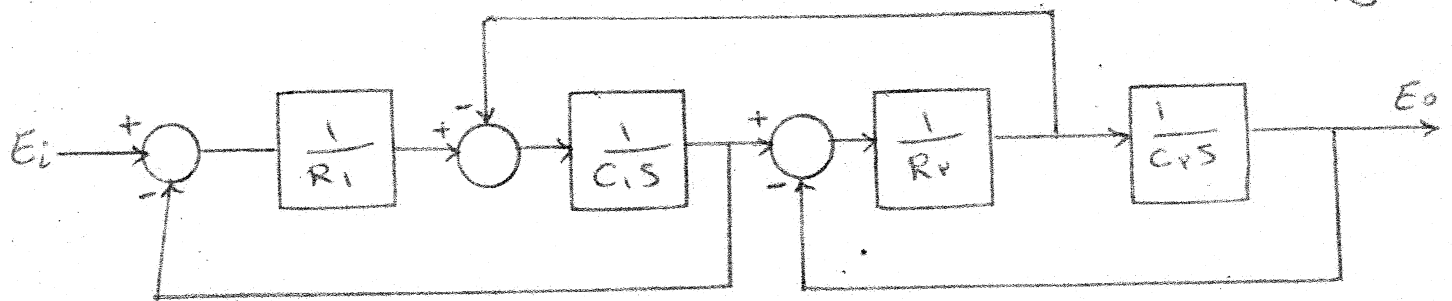
$$\Delta_{gr} = 1 - L_{gr}$$

$$\Delta \varepsilon = 1$$

$$\frac{C}{R} = \frac{P_i + P_r(1 - L_r) + P_w(1 - L_w) + P_E}{1 - \left(\sum_{i=1}^v L_i \right) + (L_r L_w + L_r L_E + L_E L_w)}$$

مجموع جلد های تمام حلقه های تکی

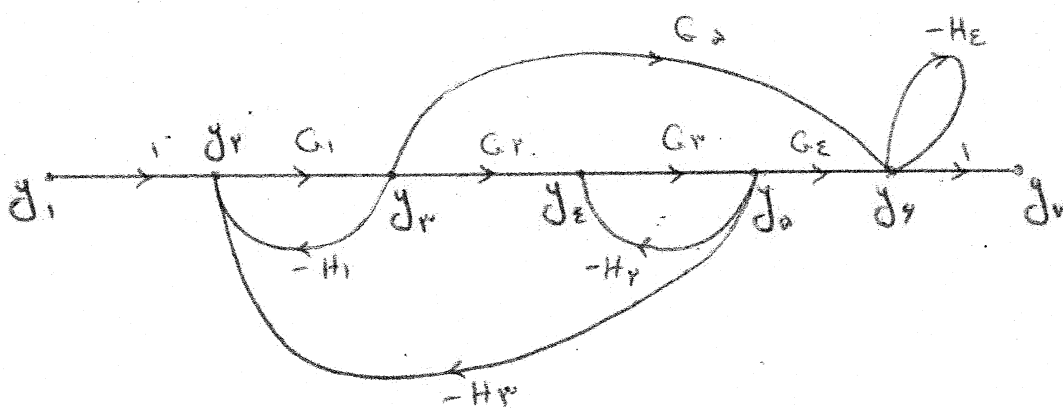
حکومت مای ۵۲ ۵۲



$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{R_i C_i R_v C_v s^2 + R_i C_i s + R_v C_v s + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{R_i R_v C_i C_v s^2 + R_i C_i s + R_v C_v s + 1}$$

$$(1 + R_i C_i s)(1 + R_v C_v s)$$



$$\frac{y_E}{y_r} = P = \frac{y_E}{y_i} = \frac{(1 + H_E) G_i G_r}{(1 + G_r H_r + H_E + G_r H_r H_E) G_i} = \frac{(1 + H_E) G_i G_r}{(1 + G_r H_r + H_E + G_r H_r H_E) G_i}$$

بازدارنده مدارات حالت:

$$\frac{d^2 C(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dC(t)}{dt} + \gamma C(t) = r(t)$$

$$\begin{aligned} C(t) &= X_1 \\ \frac{dC(t)}{dt} &= X_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = \frac{dC(t)}{dt} = X_2 \\ \dot{X}_2 = \frac{d^2 C(t)}{dt^2} = r(t) - \gamma C(t) - \gamma \frac{dC(t)}{dt} = r(t) - \gamma X_1 - \gamma X_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = r(t) - \gamma X_1 - \gamma X_2 \end{cases} \quad \text{مدارات حالت}$$

$$C(t) = X_1 \quad \text{مدار خروجی}$$

دیاگرام حالت:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

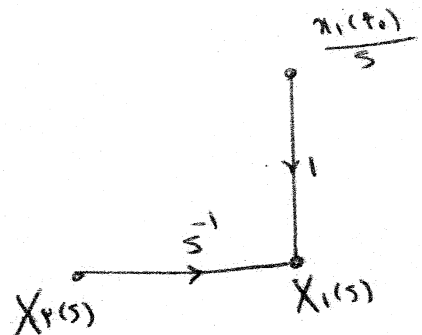
$$\Rightarrow x_1(t) = \int_{t_0}^t x_2(\tau) d\tau + x_1(t_0)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{لاپلاس}} X_1(s) &= \mathcal{L} \left[\int_{t_0}^t x_2(\tau) d\tau \right] + \frac{x_1(t_0)}{s} \\ &= \mathcal{L} \left[\int_0^t x_2(\tau) d\tau - \int_0^{t_0} x_2(\tau) d\tau \right] + \frac{x_1(t_0)}{s} \\ &= \frac{X_2(s)}{s} - \mathcal{L} \left[\int_0^{t_0} x_2(\tau) d\tau \right] + \frac{x_1(t_0)}{s} \end{aligned}$$

نویسنده $x_2(t)$ قبل از t_0 تعریف شده است و برای $t < t_0$ ، $x_2(t) = 0$ داریم

پس $x_2(t) = 0$ برای $t < t_0$

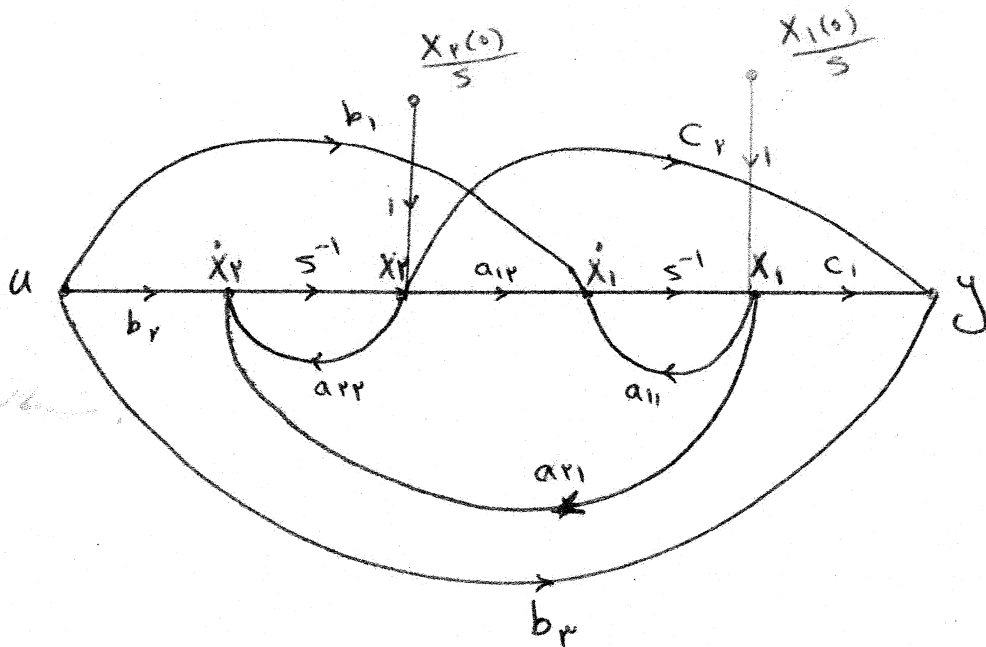
$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} + \frac{x_1(t_0)}{s}$$



مثالی از دیگرام حالت :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1 u \\ \dot{X}_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_2 u \end{cases} \quad \text{معادلات حالت :}$$

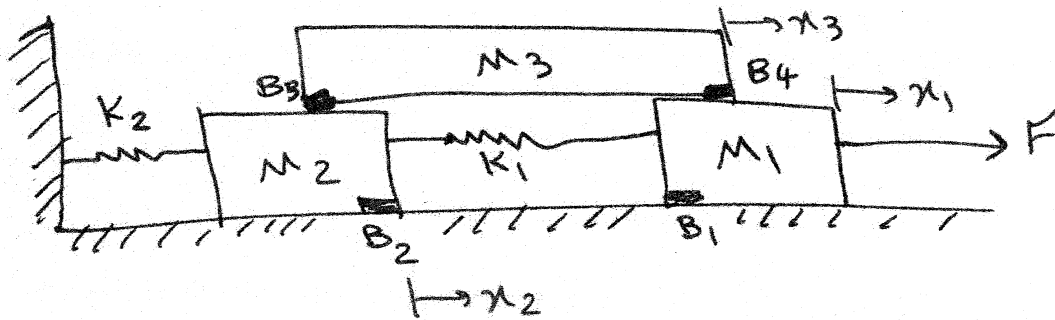
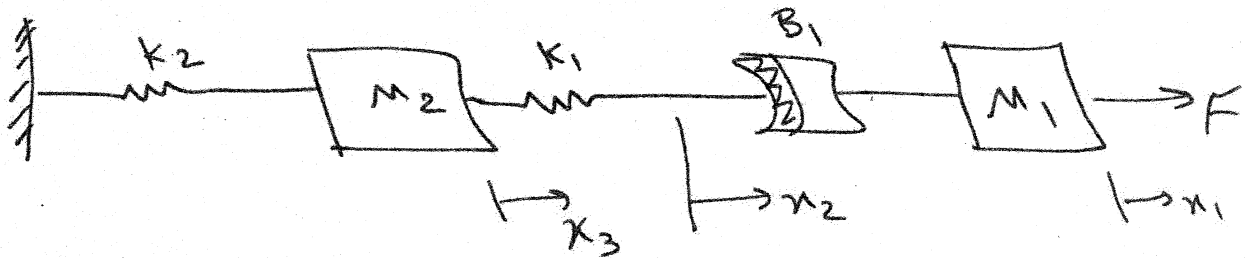
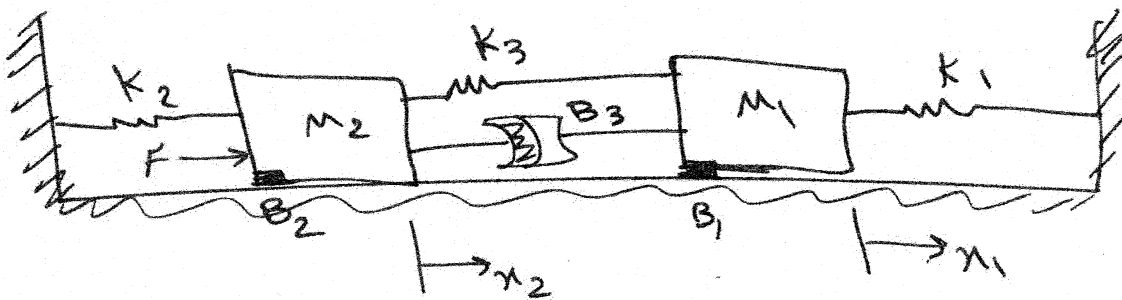
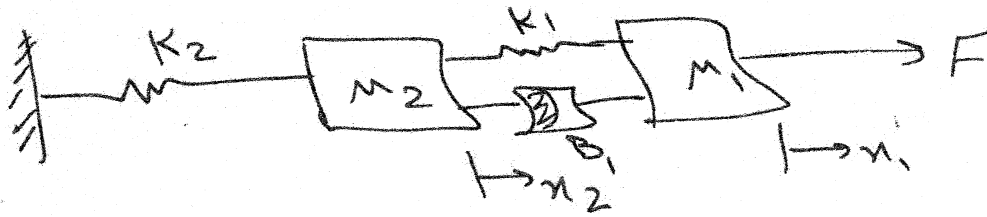
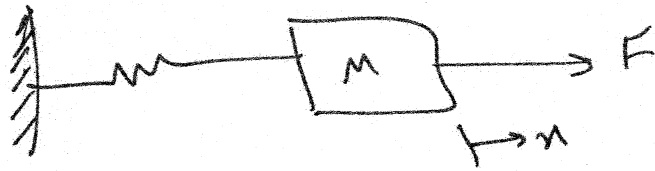
$$y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + b_3 u \quad \text{معادله خروجی :}$$



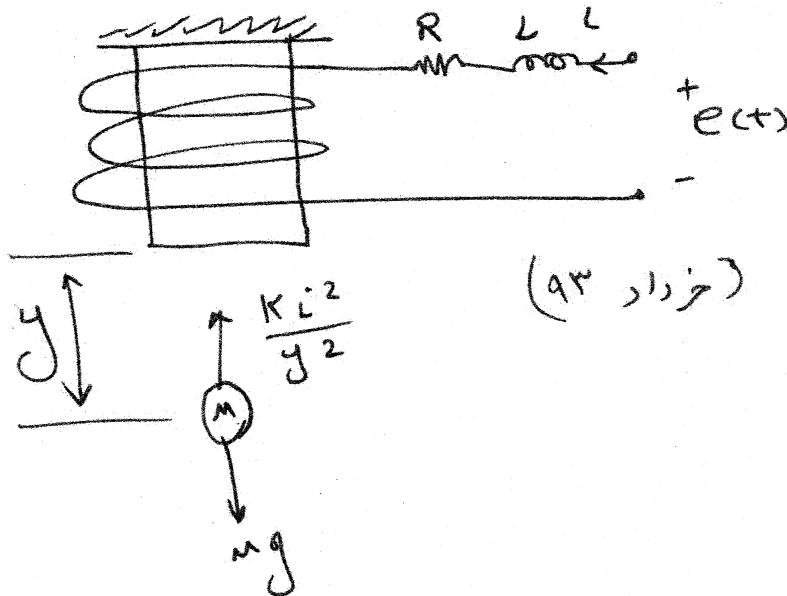
خودار حالت :

- نمودار حالت را می توان مستقیماً از معادله دیفرانسیل سیستم رسم کرد. همین امر تعیین مسیرهای حالت و معادله های حالت را ممکن می سازد.
- نمودار حالت را می توان از روی تابع تبدیل رسم کرد. این مرحله را تجزیه تابع تبدیل می نامند.
- معادله گذر حالت در حوزه تبدیل لا پلاس را می توان به کمک فرمول بهره نمودار گذر مکینال از نمودار حالت بدست آورد.
- تابعهای تبدیل سیستم را می توان از نمودار حالت بدست آورد.
- معادله های حالت و معادله های خروجی را می توان از نمودار حالت بدست آورد.

مدل سازی سیستم های مکانیکی :



$$\begin{cases} F - B_1 \dot{x}_1 - K_1 (x_1 - x_2) - B_4 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3) = M_1 \ddot{x}_1 \\ K_1 (x_1 - x_2) - B_2 \dot{x}_2 - K_2 x_2 - B_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = M_2 \ddot{x}_2 \\ B_4 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3) - B_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = M_3 \ddot{x}_3 \end{cases}$$



$$L(y) = \frac{L}{y(t)}$$

در نقطه تعادل ثابت می‌شود:

$$y_{eq} = \frac{E_{eq}}{R} \sqrt{\frac{k}{mg}}$$

K و L:

$$e(t) = R i(t) + \frac{d(L(t) i(t))}{dt}$$

$$= R i(t) + i(t) \frac{d(L(t))}{dt} + L(t) \frac{di(t)}{dt}$$

$$= R i(t) + i(t) \frac{dL}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{L}{y} \frac{di}{dt}$$

$$= R i - \frac{iL}{y^2} \frac{dy}{dt} + \frac{L}{y} \frac{di}{dt} \quad *$$

معادله نیوتن: $mg - \frac{K i^2}{y^2} = m \ddot{y} \quad (**)$

$$\frac{di}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

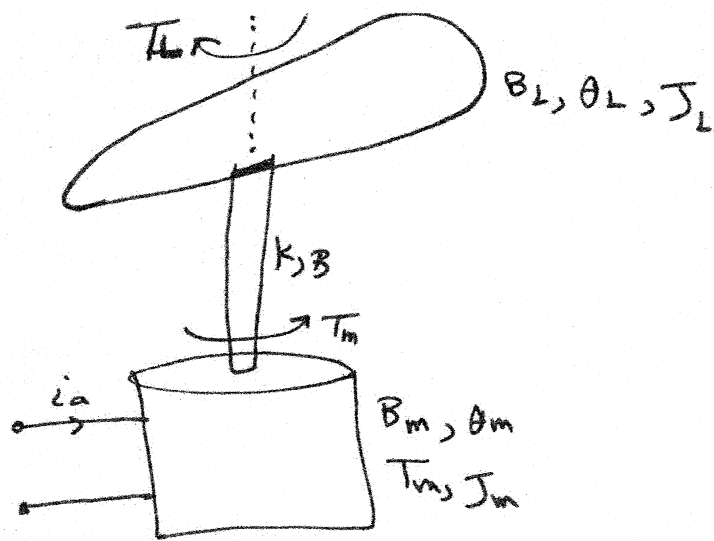
در نقطه تعادل داریم:

در نقطه تعادل $\Rightarrow$

$$E_{eq} = R I_{eq}$$

$$mg = \frac{k I_{eq}^2}{y_{eq}^2} \quad **$$

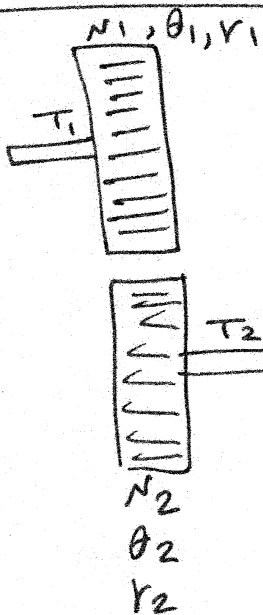
$$\Rightarrow y_{eq} = \frac{E_{eq}}{R} \sqrt{\frac{k}{mg}}$$



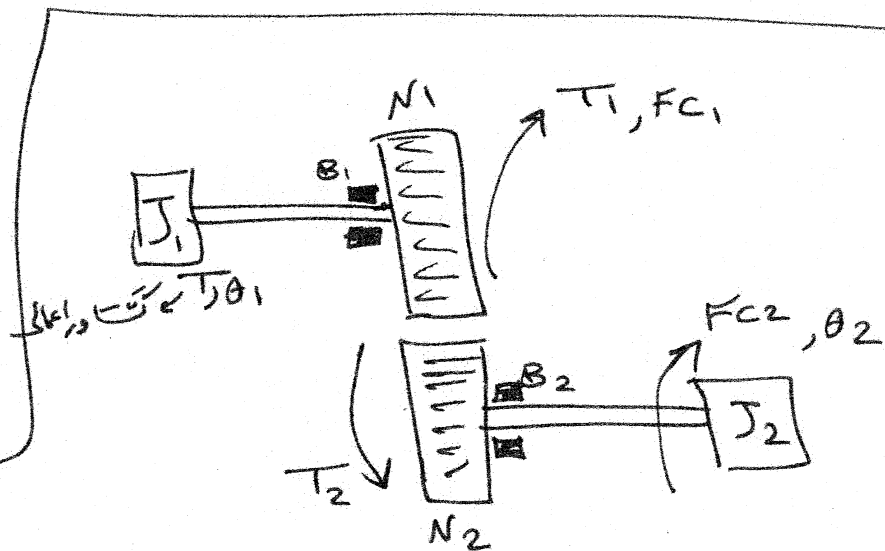
$$T_m = K_i i_a$$

$$T_m - B_m \dot{\theta}_m - K(\theta_m - \theta_L) - B(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_L) = J_m \ddot{\theta}_m$$

$$K(\theta_m - \theta_L) + B(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_L) - B_L \dot{\theta}_L - T_L = J_L \ddot{\theta}_L$$



$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$



$$\begin{cases} T - B_1 \dot{\theta}_1 - F_{c1} \frac{\dot{\theta}_1}{|\dot{\theta}_1|} - T_1 = J_1 \ddot{\theta}_1 \\ T_2 - F_{c2} \frac{\dot{\theta}_2}{|\dot{\theta}_2|} - B_2 \dot{\theta}_2 = J_2 \ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

$$T_2 = \frac{N_2}{N_1} T_1 \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} T_1 = J_2 \ddot{\theta}_2 + B_2 \dot{\theta}_2 + F_{c2} \frac{\dot{\theta}_2}{|\dot{\theta}_2|}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{N_1}{N_2} J_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{N_1}{N_2} B_2 \dot{\theta}_2 + \frac{N_1}{N_2} F_{C2} \frac{\dot{\theta}_2}{|\dot{\theta}_2|}$$

$$\frac{T_1}{\frac{N_1}{N_2}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} \Rightarrow \theta_2 = \frac{N_1}{N_2} \theta_1$$

$$\Rightarrow T_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2 \dot{\theta}_1 + \frac{N_1}{N_2} F_{C2} \frac{\dot{\theta}_2}{|\dot{\theta}_2|}$$

$$\Rightarrow T = J_1 \ddot{\theta}_1 + B_1 \dot{\theta}_1 + F_{C1} \frac{\dot{\theta}_1}{|\dot{\theta}_1|} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2 \dot{\theta}_1 + \frac{N_1}{N_2} F_{C2} \frac{\dot{\theta}_2}{|\dot{\theta}_2|}$$

$$\Rightarrow T = \left(J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2\right) \ddot{\theta}_1 + \left(B_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_2\right) \dot{\theta}_1 + \left(F_{C1} \frac{\dot{\theta}_1}{|\dot{\theta}_1|} + \frac{N_1}{N_2} F_{C2} \frac{\dot{\theta}_2}{|\dot{\theta}_2|}\right)$$

$$T = J_{1e} \ddot{\theta}_1 + B_{1e} \dot{\theta}_1 + T_F$$

1*

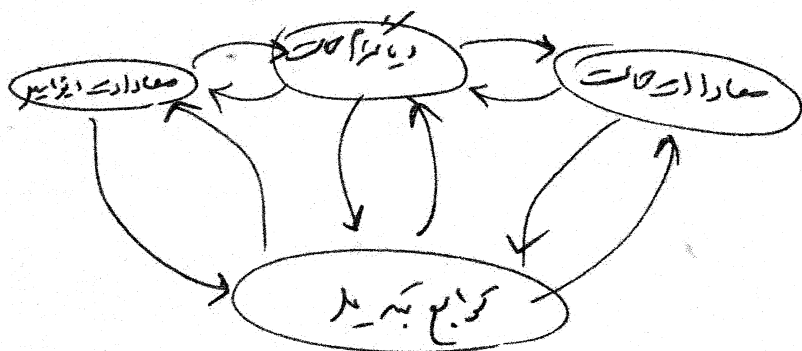
روشهای مختلف خائش کید سیستم:

۱- معادلات دیفرانسیل

۲- معادلات حالت

۳- کوانج تبدیل

۴- جبرام حالت



$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u$$

$$y = x_1$$

$$\frac{dy}{dt} = x_2$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = x_3$$

...

$$\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = x_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = u - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n \end{cases}$$

همانی

فرم کانونیکال

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

فرم استاندارد

(2*)

فرم ماتریسی معادلات حالت $\Rightarrow \dot{X} = AX + BU$
 $\downarrow$
بازار حالت

خروجی $y = x_1$

$$y = \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_D u$$

معادله خروجی $y = CX + Du$

معادلات ریاضیاتی $\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ y = CX + Du \end{cases}$

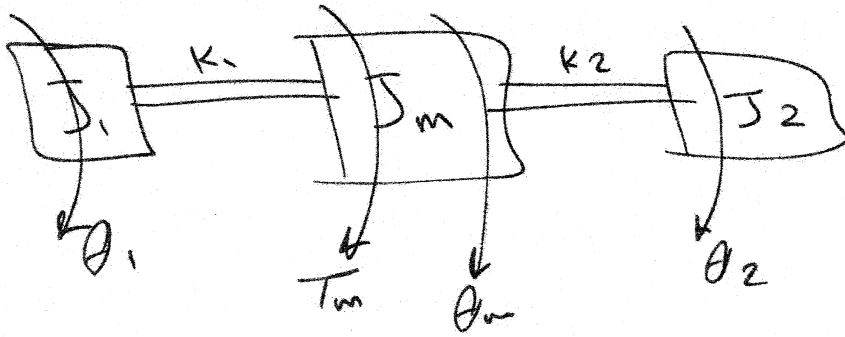
* اگر سیرکشی به روش کانونیکال فاز نوشته شود، گاهی کنترل پذیر است * برداشته

(مثال) $y^{(3)} + 2y^{(2)} + 4y' + 3y = u$

$$\begin{cases} y = x_1 \\ y' = x_2 \\ y'' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} y = x_1 \\ C = [1 \ 0 \ 0] \\ D = 0 \end{cases}$$

3



$$\begin{cases} T_m - K_1(\theta_m - \theta_1) - K_2(\theta_m - \theta_2) = J_m \ddot{\theta}_m \\ K_1(\theta_m - \theta_1) = J_1 \ddot{\theta}_1 \\ K_2(\theta_m - \theta_2) = J_2 \ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = x_1 \\ \dot{\theta}_1 = x_2 \\ \theta_2 = x_3 \\ \dot{\theta}_2 = x_4 \\ \theta_m = x_5 \\ \dot{\theta}_m = x_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1 = \frac{K_1}{J_1} x_5 - \frac{K_1}{J_1} x_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2 = \frac{K_2}{J_2} x_5 - \frac{K_2}{J_2} x_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = \frac{1}{J_m} T_m - \frac{(K_1 + K_2)}{J_m} x_5 + \frac{K_1}{J_m} x_1 + \frac{K_2}{J_m} x_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{J_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_2}{J_2} & 0 & \frac{K_2}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_1}{J_m} & 0 & \frac{K_2}{J_m} & 0 & -\frac{(K_1 + K_2)}{J_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} T_m$$

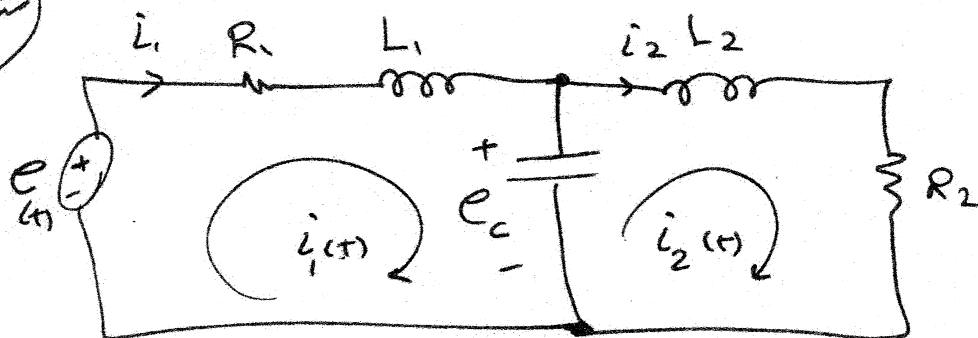
(4*)

$$y = \theta_m = x_5$$

$$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

dc



$$\begin{cases} e(t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + e_c \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = e_c \\ C \frac{de_c}{dt} = i_1 - i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1} e_c + \frac{1}{L_1} e(t) \\ \frac{di_2}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2} e_c \\ \frac{de_c}{dt} = \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = x_1 \\ i_2 = x_2 \\ e_c = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1} x_1 - \frac{1}{L_1} x_3 + \frac{1}{L_1} e(t) \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_2}{L_2} x_2 + \frac{1}{L_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{C} x_2 \end{cases}$$

5 *

دیکرام حالت

$$\dot{X}_1(t) = X_2(t)$$



$$X_1(t) = \int_{t_0}^t X_2(z) dz + X_1(t_0)$$

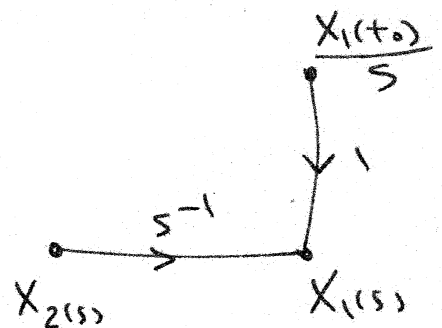
بهر (الان)

$$X_1(s) = \mathcal{L} \left[\int_{t_0}^t X_2(z) dz \right] + \frac{X_1(t_0)}{s}$$

$$X_1(s) = \mathcal{L} \left[\int_0^t X_2(z) dz + \int_{t_0}^t X_2(z) dz \right] + \frac{X_1(t_0)}{s}$$

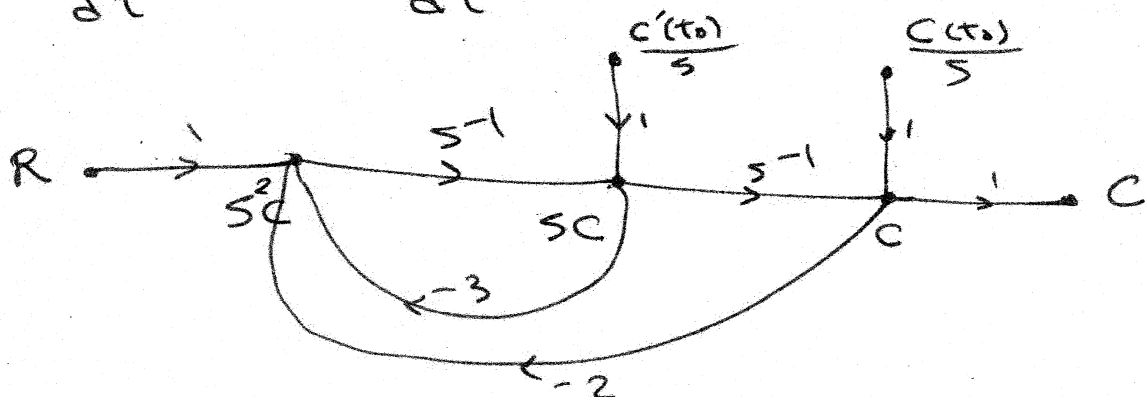
صفر است چون برابر t_0 سینتیک می‌شود

$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} + \frac{X_1(t_0)}{s}$$



مثال) $\frac{d^2 c}{dt^2} + 3 \frac{dc}{dt} + 2c = r$

$$\frac{d^2 c}{dt^2} = -3 \frac{dc}{dt} - 2c + r$$



6*

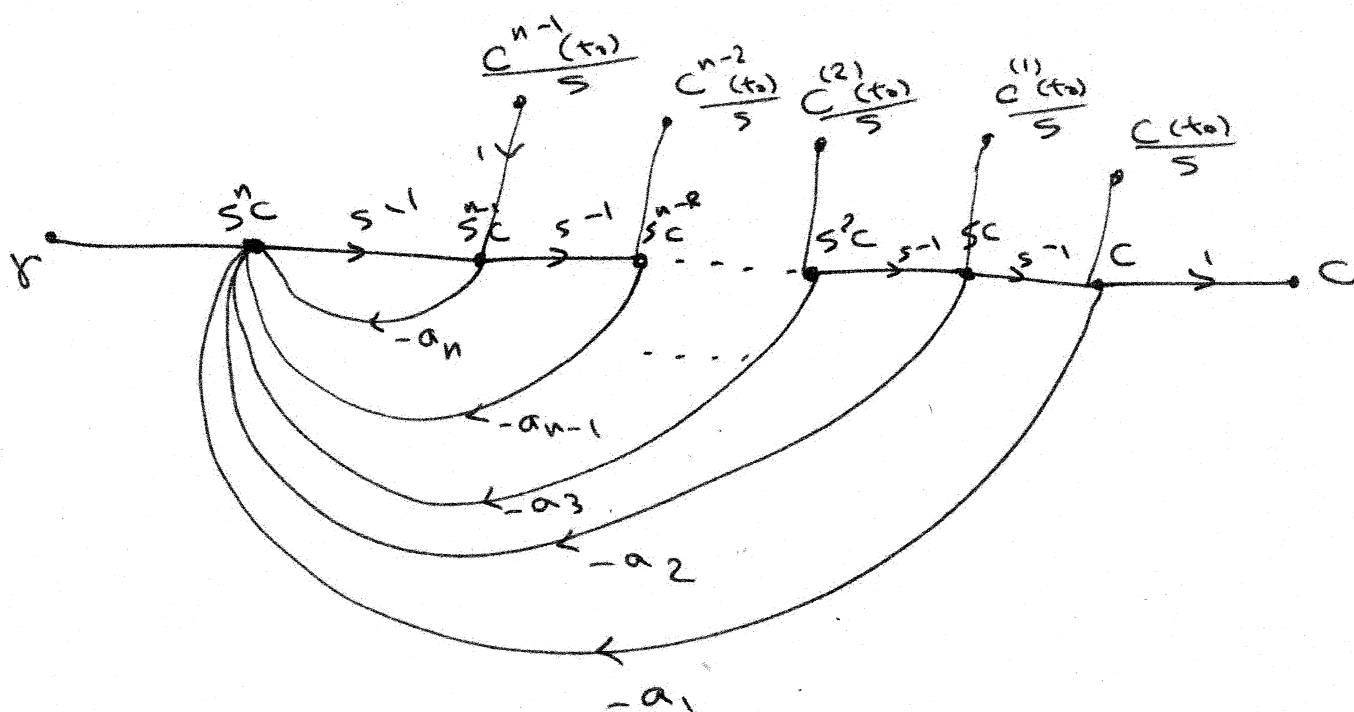
در حالت کلی داریم:

$$\frac{d^n c}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{dc}{dt} + a_1 c = r$$

برای بالاترین مرتبه مشتق ساده‌ترین حالت ممکن داریم:

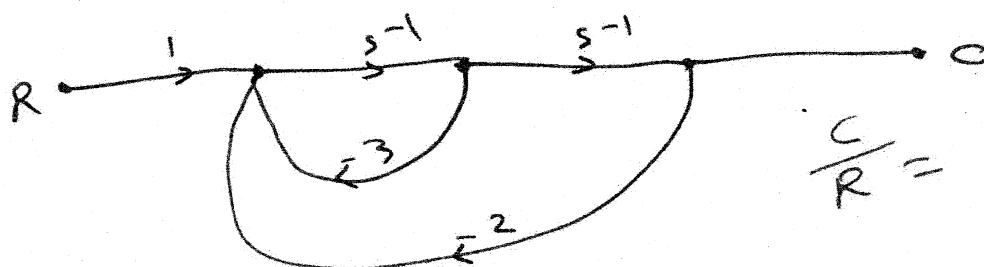
$$\frac{d^n c}{dt^n} = -a_n \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} - \dots - a_2 \frac{dc}{dt} - a_1 c + r$$

حال n تا اشتقاق بگیریم - هم‌قارمی داریم تا جایی که به دست آییم.



* برای به دست آوردن تابع انتقال از دیگر حالت‌ها فراتر می‌رویم و به دست می‌آوریم:

صفرها را داریم. در شکل قبل داریم:

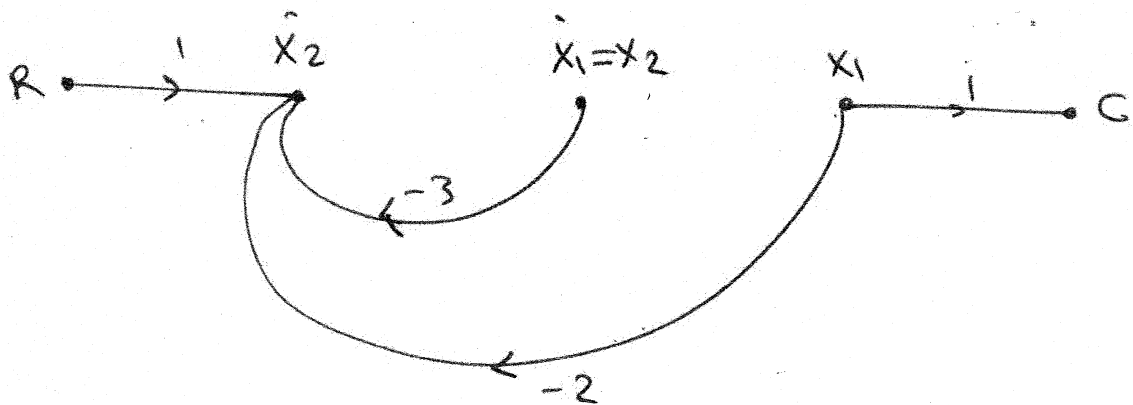
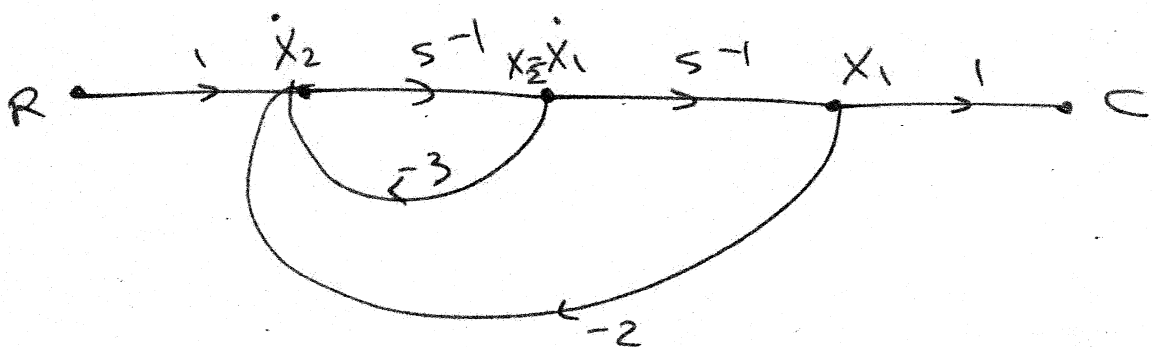


$$\frac{C}{R} = \frac{s^2}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}$$

(7*)

$$\Rightarrow \frac{C}{R} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

* برای به دست آوردن مدارات حالت از روی دیاگرام حالت می‌توان استفاده کرد
حذف کنیم داریم:

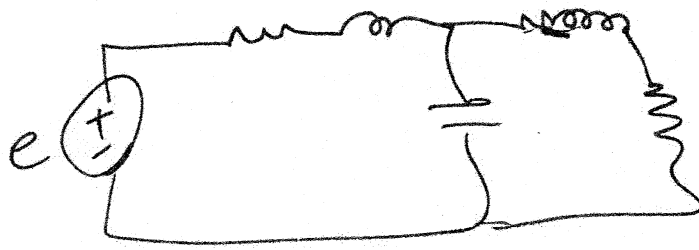


$$\dot{X}_1 = X_2$$

$$\dot{X}_2 = R - 3X_2 - 2X_1$$

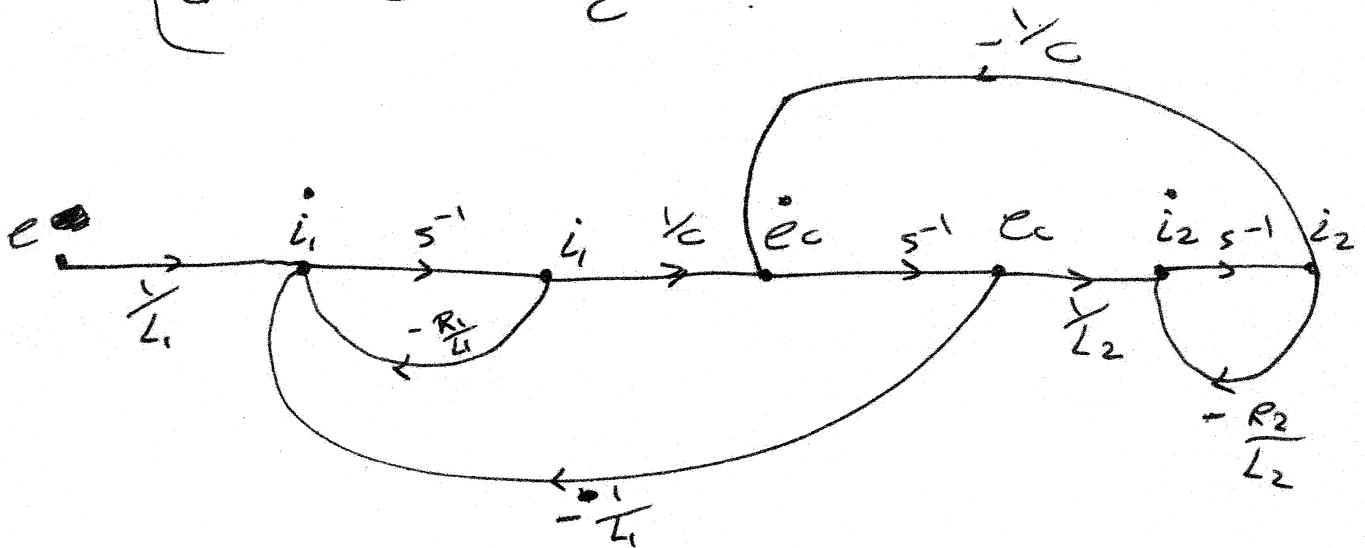
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

8*



شکل 4* : دینال صفا

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_2} e_c + \frac{1}{L_1} e(t) \\ \frac{di_2}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2} e_c \\ \frac{de_c}{dt} = \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_2 \end{cases}$$



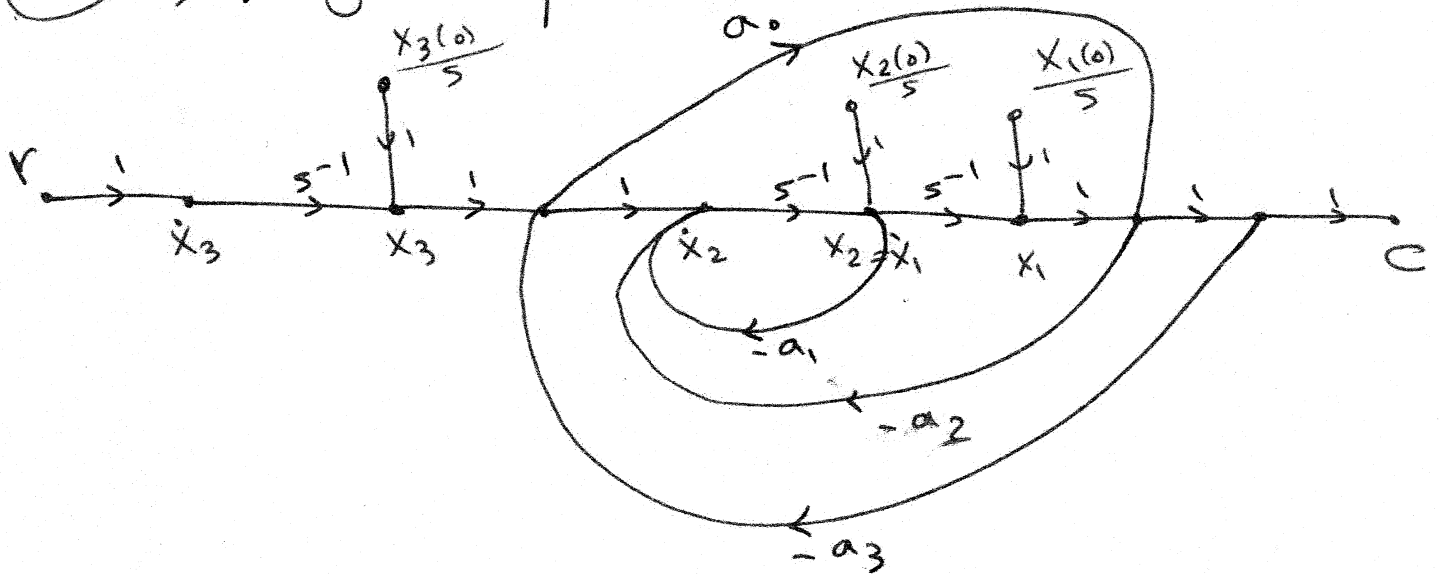
(دینال صفا)

$$\Delta = 1 + \frac{R_1}{L_1 s} + \frac{R_2}{L_2 s} + \frac{1}{CL_1 s^2} + \frac{1}{CL_2 s^2} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 s^2} + \frac{R_1}{L_1 L_2 C s^3} + \frac{R_2}{L_1 L_2 C s^3}$$

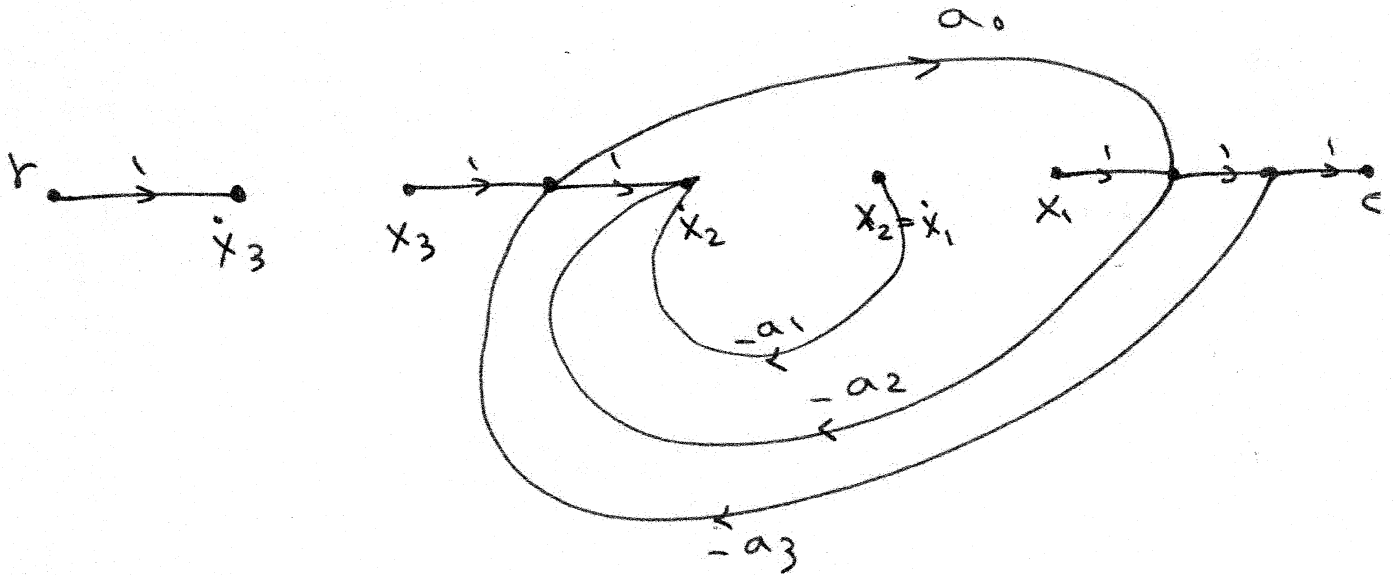
$$\frac{I_1(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{L_1 s} \left(1 + \frac{R_2}{L_2 s} + \frac{1}{L_2 C s^2} \right)}{\Delta}$$

مع انتقال

مثال: مدارات حالتی توصیف شده با دایگرام حالت مقابل را بنویسید. 9*



برای نوشتن مدارات حالت ← شرایط اولیه = صفر
حذف s^{-1} ها $\Leftarrow$ داریم:



$$\dot{x}_1 = x_2$$

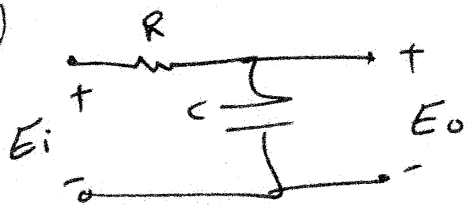
$$\dot{x}_2 = \frac{-a_2 - a_3}{1 + a_0 a_3} x_1 + \frac{-a_1 (1 + a_0 a_3)}{1 + a_0 a_3} x_2 + \frac{1 - a_0 a_2}{1 + a_0 a_3} x_3$$

$$\dot{x}_3 = r$$

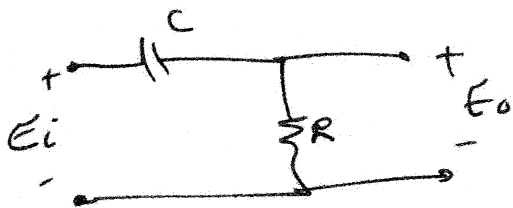
$$C = \frac{1}{1 + a_0 a_3} x_1 + \frac{a_0}{1 + a_0 a_3} x_3$$

مدار نهایی

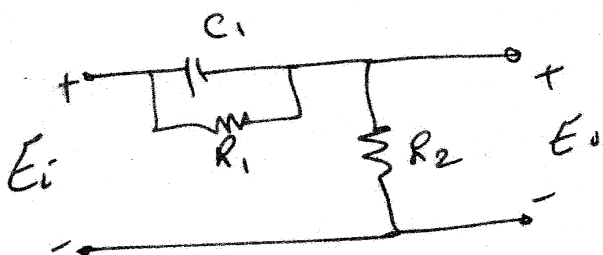
(10)



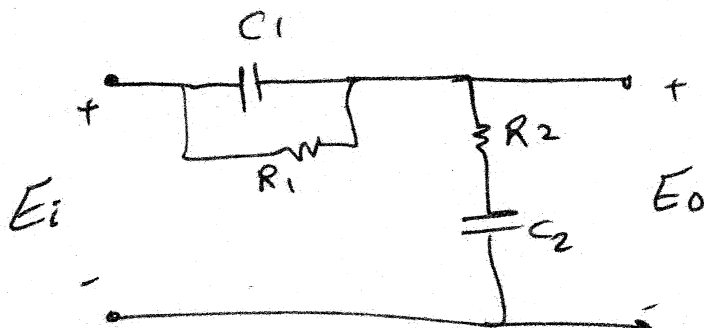
$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{1 + RCs}$$



$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

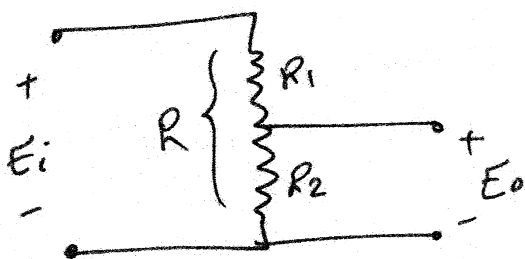


$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1}} = \frac{s + z_1}{s + z_2}$$

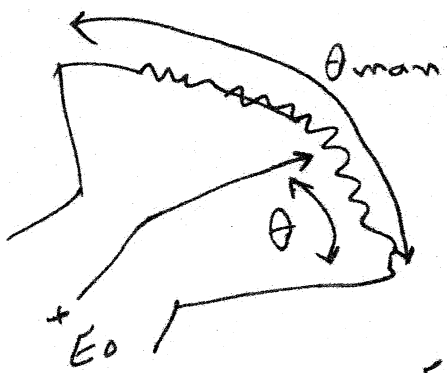


$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{(1 + z_1 s)(1 + z_2 s)}{(1 + z_3 s)(1 + z_4 s)}$$

فیلتر پسیو نا - پسیو نا



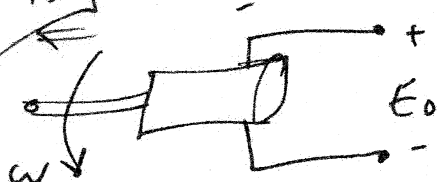
$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$



$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{\theta}{\theta_{max}}$$

$$E_o = \frac{E_i}{\theta_{max}} \theta = K \theta$$

$$\frac{E_o(s)}{\theta(s)} = K + s$$



$$E_o = K + \omega, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow s \theta(s) = \omega(s)$$

$$E_o(s) = K + \omega(s) = K + s \theta(s)$$

ماتریس انتقال حالت (state transition matrix)

- تغییر یک سیستم با مدارات حالت، دینامیکی های مدل را دارد (اعم از خطی و غیر خطی) و تغییرپذیری باران یا تغییرناپذیری باران (تغییرپذیری باران به معنی تغییرپذیری باران است).

شکل کلی مدارات حالت:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)]$$

تغییرپذیری باران

$$y(t) = g[x(t), u(t)]$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t) X(t) + B(t) U(t) \\ y(t) = C(t) X(t) + D(t) U(t) \end{cases}$$

سیستم خطی تغییرناپذیری باران

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \\ y(t) = C X(t) + D U(t) \end{cases}$$

$\begin{matrix} n \times 1 & n \times n & n \times 1 & n \times p & p \times 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ q \times 1 & q \times n & n \times 1 & q \times p & p \times 1 \end{matrix}$

سیستم خطی تغییرناپذیری باران

حل مدارات حالت:

$$\dot{X} = AX + BU \Rightarrow e^{-At} [\dot{x}(t) - Ax(t)] = e^{-At} Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} x(t)] = e^{-At} Bu(t)$$

$$\Rightarrow e^{-At} x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-Az} B u(z) dz$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{e^{At}}_{\phi(t)} x(0) + \int_0^t e^{A(t-z)} B u(z) dz$$

$$x(t) = \phi(t) x(0) + \int_0^t \phi(t-z) B u(z) dz$$

ماتریس STM ماتریس است که در معادله بالا جای صدق می‌دهد.

$\phi(t)$ ماتریس انتقال

$$\dot{x} = Ax(t)$$

$$\dot{\phi}(t) = A \phi(t)$$

$$x(0) \xrightarrow{B=0} x(t) = \phi(t) x(0)$$

$$\dot{x} = Ax(t) \rightarrow \int \dot{x} = \int Ax(t) \rightarrow x(s) - x(0) = Ax(s)$$

$$x(s) = (sI - A)^{-1} x(0)$$

$$x(t) = \int \underbrace{\{ (sI - A)^{-1} \}}_{\phi(t)} x(0)$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \int^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

Σ

خواص ماتریس : STM

$$1) \phi(0) = e^{A \cdot 0} = I$$

$$2) \phi^{-1}(t) = e^{-At} = e^{A(-t)} = \phi(-t)$$

$$\phi(t) = e^{At} \rightarrow \phi(t) e^{-At} = I$$

$$\xrightarrow{\phi^{-1}(t)} \phi^{-1}(t) = e^{-At}$$

$$X(t) = \phi(t) X(0) \rightarrow \underbrace{\phi^{-1}(t)}_{\phi(-t)} X(t) = \underbrace{\phi^{-1}(t) \phi(t)}_I X(0)$$

$$\Rightarrow X(0) = \phi(-t) X(t)$$

$$3) e^{A(t-t_2)} = e^{A(t-t_1)} e^{A(t_1-t_2)}$$

$$\Rightarrow \phi(t-t_2) = \phi(t-t_1) \phi(t_1-t_2)$$

$$4) [\phi(t)]^k = \phi(kt)$$

$$\underbrace{e^{At} e^{At} \dots e^{At}}_{k \text{ times}} = e^{A(kt)} = \phi(kt)$$

$$5) \phi(t_1+t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \phi(t_1) \phi(t_2) = \phi(t_2) \phi(t_1)$$

$$\text{Ex} \quad \dot{X}(t) = A X(t) \rightarrow X(t) = e^{At} X(0)$$

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{1}{1!} \alpha^2 t^2 + \dots$$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{1!} A^2 t^2 + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \rightarrow \frac{d}{dt} e^{At} = A + \frac{A^2 t}{1!} + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots$$

$$= A \left(I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \right) = A e^{At}$$

$$\boxed{Q(t) = e^{At}}$$

Ex)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2+4s+3} & \frac{1}{s^2+4s+3} \\ \frac{-3}{s^2+4s+3} & \frac{s}{s^2+4s+3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} 1/e^{-t} & 1/e^{-3t} \\ -1/e^{-t} + 1/e^{-4t} & 1/e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/e^{-t} & 1/e^{-4t} \\ 1/e^{-4t} & 1/e^{-t} \end{bmatrix}$$

مثال ۵: حالت نامعین را در نظر بگیرید:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + Bu(s)$$

$$(sI - A)X(s) = X(0) + Bu(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}}_{\phi(s)} X(0) + \underbrace{(sI - A)^{-1} B}_{\text{ماتریس انتقال}} U(s)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} X(0) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} B U(s)$$

$$x(t) = \phi(t) X(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau$$

$$x(t) = \phi(t-t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau$$

e^{At} به کمک STM با استفاده از

مثال ۶)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & t \\ 0 & -2t \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} +t^2 & -3t^2 \\ 0 & +4t^2 \end{bmatrix} + \dots$$

4/4

$$\Rightarrow \phi(t) = \begin{bmatrix} 1 - t + \frac{1}{2!} t^2 + \dots & t - \frac{10}{1!} t^2 + \dots \\ 0 & 1 - 4t + \frac{2}{1!} t^2 + \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-4t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

ساخته شده، یکبار

$$\phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-14 \quad -8] x$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s+9 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} = \begin{bmatrix} \frac{s+9}{(s+2)(s+8)} & \frac{1}{(s+2)(s+8)} \\ \frac{-4}{(s+2)(s+8)} & \frac{s}{(s+2)(s+8)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{0}{s+2} - \frac{2}{s+8} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+8} \\ \frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+8} & \frac{-2}{s+2} - \frac{8}{s+8} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

✓

محاسبه ماتریس انتقال حالت با استفاده از اویلر سیلوستر

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \cdot F_i$$

$$F_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} x \quad : \delta^{\infty}$$

$$|sI - A| = 0 \Rightarrow s_1 = -1, \quad s_2 = -2$$

$$F_1 = \frac{A - s_2 I}{s_1 - s_2} = \frac{A + 2I}{1} = A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \frac{A - s_1 I}{s_2 - s_1} = \frac{A + I}{-2 - (-1)} = -(A + I) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = e^{s_1 t} F_1 + e^{s_2 t} F_2 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

تبدیل حالت از روی معادله دیفرانسیل:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-1} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_2 \frac{dy}{dt} + a_1 y = b_0 u(t)$$

$$y = x_1$$

$$\dot{y} = x_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = x_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + b_0 u(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

در صورتیکه بخواهیم کنترل خطی را بر روی یک سیستم فاز را به صورت فاز قابل کنترل درآوریم

عبارت استاندارد سیستم را به صورت $\dot{x} = Ax + Bu$ و $y = Cx + Du$ در آوریم

$$c) \quad D^3 y + 9D^2 y + 11Dy + 9y = 9u$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -11 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سطر اولی از A را -9 -11 -4
 ضرایب صاف شده 9 11 4

$$s^3 + 9s^2 + 11s + 4 = 0$$

و تئیه مشتقات عددی نیز وجود داشته و اینکه کار در تئیه ابراست و نه
 به سوره می بیند صد رات است از این منبع انتقال می دهیم.

$$\frac{d^3 c}{dt^3} + 5 \frac{d^2 c}{dt^2} + \frac{dc}{dt} + 2c = \frac{dh}{dt} + 2h \quad (1)$$

$$\frac{d^3 c}{dt^3} - \frac{dh}{dt} = -5 \frac{d^2 c}{dt^2} - \frac{dc}{dt} - 2c + 2h$$

$$c = x_1$$

$$\dot{x}_1 = \dot{c} = x_2$$

$$x_3 = \frac{d^2 c}{dt^2} - h(t) \Rightarrow \dot{x}_3 = \frac{d^3 c}{dt^3} - \frac{dh}{dt}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + h(t) \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - x_2 - 5x_3 - 3h \end{cases}$$

$$\text{Line } \frac{d^3 y}{dt^3} + \gamma \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + \varepsilon y = \nu \frac{d^2 u}{dt^2} + \psi \frac{du}{dt} + \xi u$$

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 + \alpha_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \alpha_2 u \\ \dot{x}_3 = -\varepsilon x_1 - \delta x_2 - \gamma x_3 + \alpha_3 u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

$$\frac{dy}{dt} = x_2 + \alpha_1 u$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \dot{x}_2 + \alpha_1 \dot{u} = x_3 + \alpha_2 u + \alpha_1 \dot{u}$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = \dot{x}_3 + \alpha_2 \dot{u} + \alpha_1 \ddot{u}$$

$$= -\varepsilon x_1 - \delta x_2 - \gamma x_3 + \alpha_2 \dot{u} + \alpha_1 \ddot{u} + \alpha_3 u$$

$$\begin{aligned} \varepsilon y + \delta \dot{y} + \gamma \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^3 y}{dt^3} &= \cancel{\varepsilon x_1} + \cancel{\delta x_2} + \cancel{\delta \alpha_1 u} + \cancel{\gamma x_3} \\ &\quad + \cancel{\gamma \alpha_2 u} + \cancel{\varepsilon x_1} - \cancel{\delta x_2} - \cancel{\gamma x_3} \\ &\quad + \gamma \alpha_2 \dot{u} + \delta \alpha_1 \dot{u} + \alpha_1 \ddot{u} + \alpha_3 u \\ \Rightarrow \delta \alpha_1 u + \gamma \alpha_2 \dot{u} + \alpha_3 u &+ \alpha_2 \dot{u} + \alpha_1 \ddot{u} = \nu \ddot{u} + \psi \dot{u} + \xi u \\ \alpha_1 &= \nu \quad \alpha_2 = -\gamma \quad \alpha_3 = \xi \end{aligned}$$

ص ۱۱

معادلات حالت با استفاده از تابع تبدیل
بخشیه توابع انتقال

۱- روش مستقیم ۲- روش سری ۳- روش همبازی

۱- روش مستقیم

$$\frac{C}{R} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

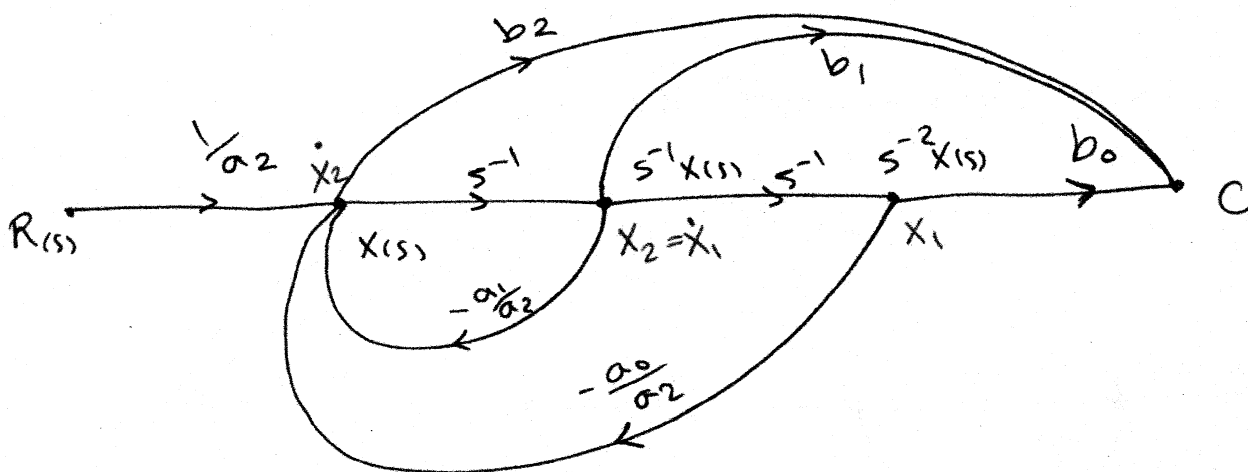
ابتدا صورت درمخرج را به بالاترین توان صورت درمخرج تقسیم کنیم.

$$\frac{C}{R} = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{a_2 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}} \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$\Rightarrow C = (b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}) X(s)$$

$$R = (a_2 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}) X(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{a_2} R(s) - \frac{a_1 s^{-1}}{a_2} X(s) - \frac{a_0 s^{-2}}{a_2} X(s)$$



حال برای نوشتن معادلات حالت خطوط s^{-1} را حذف می‌کنیم داریم:

12)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{a_0}{a_2} x_1 - \frac{a_1}{a_2} x_2 + \frac{1}{a_2} v \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix}$$

$$C = \left(b_0 - \frac{b_2 a_0}{a_2} \right) x_1 + \left(b_1 - \frac{b_2 a_1}{a_2} \right) x_2 + \frac{b_2}{a_2} v$$

8c) $D^2 y + 9Dy + 20y = D^2 u + 4Du + 3$

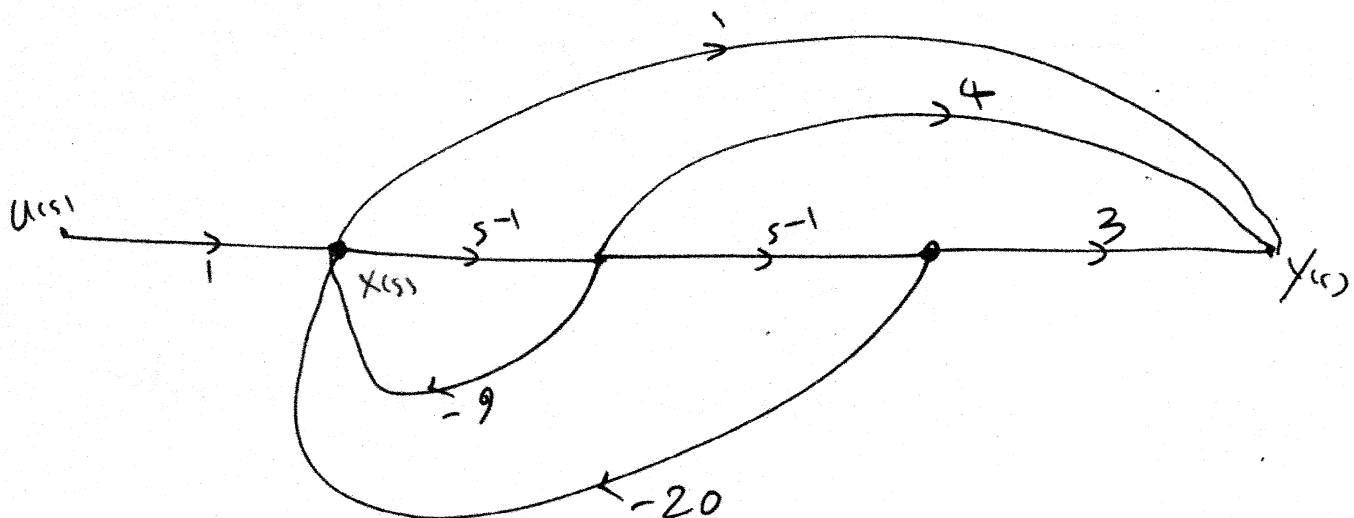
$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 9s + 20}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1 + 4s^{-1} + 3s^{-2}}{1 + 9s^{-1} + 20s^{-2}} \quad \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = (1 + 4s^{-1} + 3s^{-2}) X(s)$$

$$U(s) = (1 + 9s^{-1} + 20s^{-2}) X(s)$$

$$\rightarrow X(s) = U(s) - 9s^{-1} X(s) - 20s^{-2} X(s)$$



$$\begin{aligned} \text{1st} \Rightarrow & \begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -9X_2 - 20X_1 + u \end{cases} \end{aligned}$$

$$Y = \begin{matrix} -17 & -5 \end{matrix} \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} + u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n]$$

$$D = b_n \quad \text{صورت اولی در کسر}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

$$C = [\dots \dots \dots 1] \quad D = b_n \quad \text{صورت اولی در کسر}$$

۱۴۰

۲- روش تجزیه سری

$$\frac{C}{R} = \frac{a_0}{b_0} \frac{s+z_1}{s+p_1} \frac{s+z_2}{s+p_2}$$

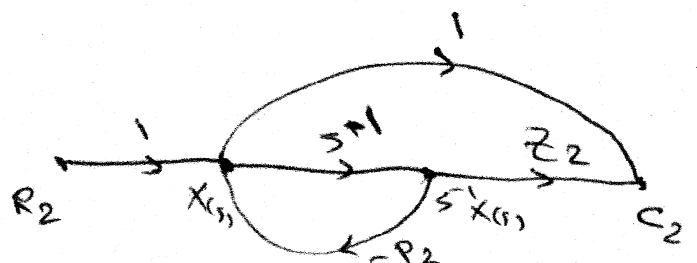
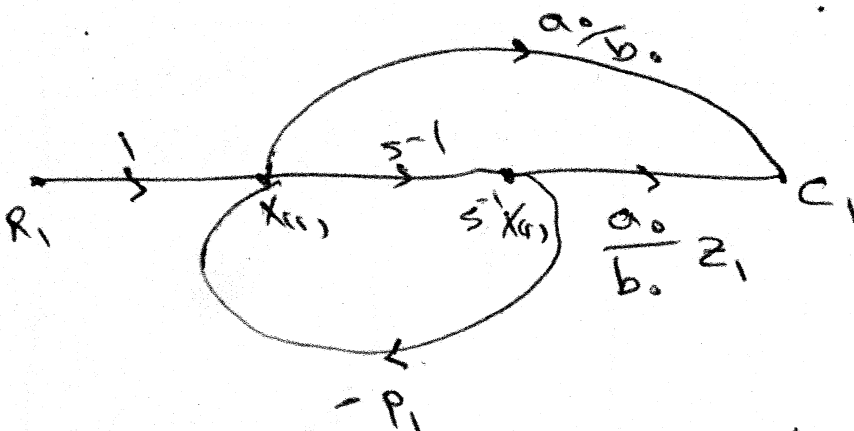
برای انتقال نمره به قابل تجزیه باشد، کافیه عبارات سری را به هم مقیم
حل کرد. رسید به شکل سری در دو گرام حالت قرار دهیم:

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{a_0}{b_0} \frac{1+z_1 s^{-1}}{1+p_1 s^{-1}} \frac{X(s)}{X(s)}$$

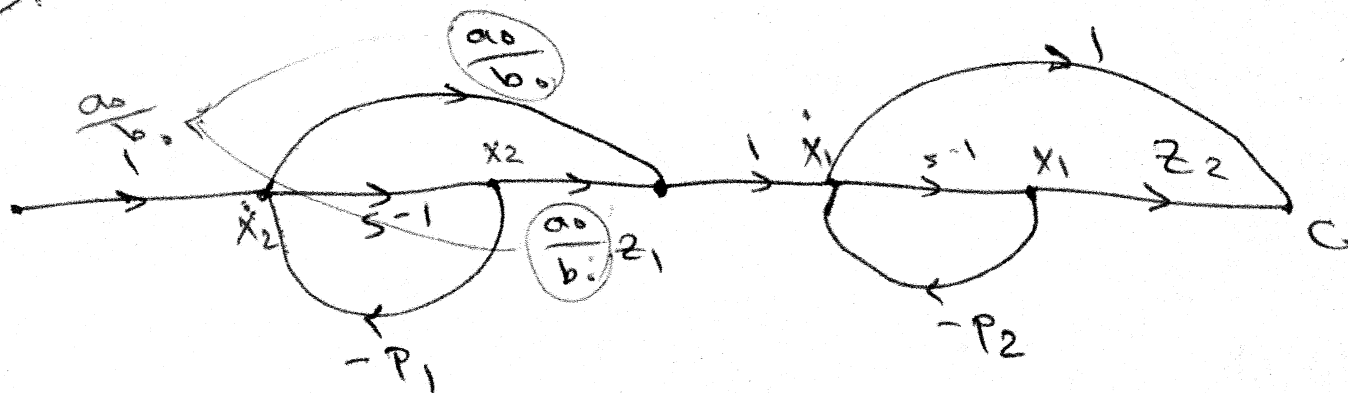
$$\frac{C_2}{R_2} = \frac{1+z_2 s^{-1}}{1+p_2 s^{-1}} \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{a_0}{b_0} (1+z_1 s^{-1}) X(s) \\ R_1 = X(s) + p_1 s^{-1} X(s) \Rightarrow X(s) = R_1 - p_1 s^{-1} X(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = X(s) - z_2 s^{-1} X(s) \\ R_2 = X(s) + p_2 s^{-1} X(s) \Rightarrow X(s) = R_2 - p_2 s^{-1} X(s) \end{cases}$$



۱۵



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_2 & z_1 - p_1 \\ 0 & -p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_0}{b_0} \\ \frac{a_0}{b_0} \end{bmatrix} r$$

$$C = (z_2 - p_2) x_1 + (z_1 - p_1) x_2 + \frac{a_0}{b_0} r$$

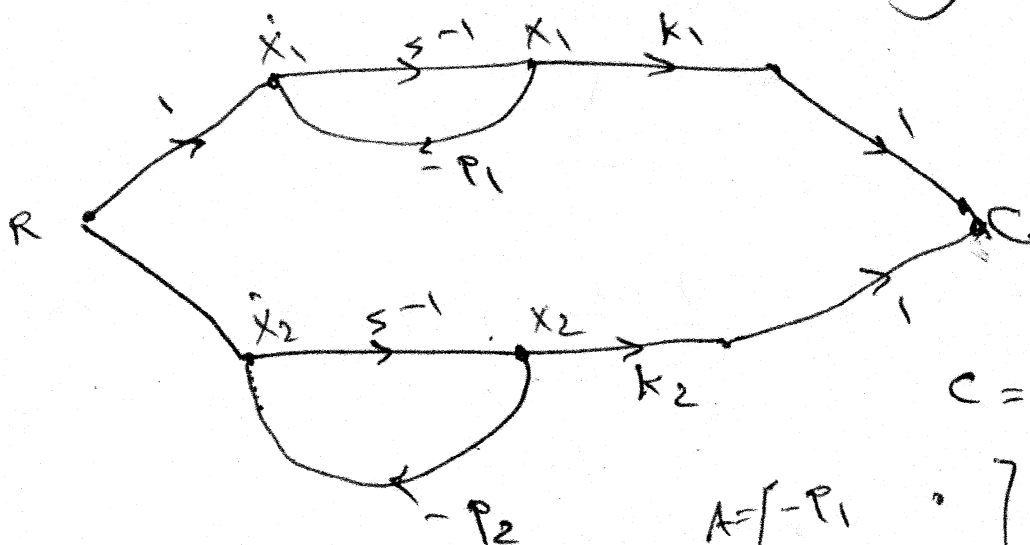
۳- روش تجزیه موازی:

(نیاز به دانستن محل قطب‌هاست)

$$\frac{C}{R} = \frac{P(s)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$$= \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2}$$

→ در روش مستقیم هم بود و باید موازی هم کرد



$$C = [K_1 \ K_2]$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در حالت موازی

کشن این روش را نیست که مقادیرات به شکل قطبی

14

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} = \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \frac{K_3}{s+p_3}$$

$$Y(s) = K_1 \left(\frac{U(s)}{s+p_1} \right) + K_2 \left(\frac{U(s)}{s+p_2} \right) + K_3 \left(\frac{U(s)}{s+p_3} \right)$$

$X_1 \quad X_2 \quad X_3$

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{s+p_1} \Rightarrow sX_1(s) = -p_1 X_1(s) + U(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = -p_1 X_1 + U \\ \dot{X}_2 = -p_2 X_2 + U \\ \dot{X}_3 = -p_3 X_3 + U \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -p_1 & & \\ & -p_2 & \\ & & -p_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [K_1 \ K_2 \ K_3]$$

$$G(s) = \frac{2s^2 + 6s + 5}{(s+1)^2 (s+2)}$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$\Rightarrow X(s) = K_1 \left(\frac{U(s)}{(s+1)^2} \right) + K_2 \left(\frac{U(s)}{s+1} \right) + K_3 \left(\frac{U(s)}{s+2} \right)$$

$X_1 \quad X_2 \quad X_3$

$$X_3 = \frac{U}{s+2} \Rightarrow \dot{X}_3 = -2X_3 + U$$

$$X_2 = \frac{U}{s+1} \Rightarrow \dot{X}_2 = -X_2 + U$$

✓✓

$$X_1 = \frac{u}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow sX_1 + X_2 = 0$$

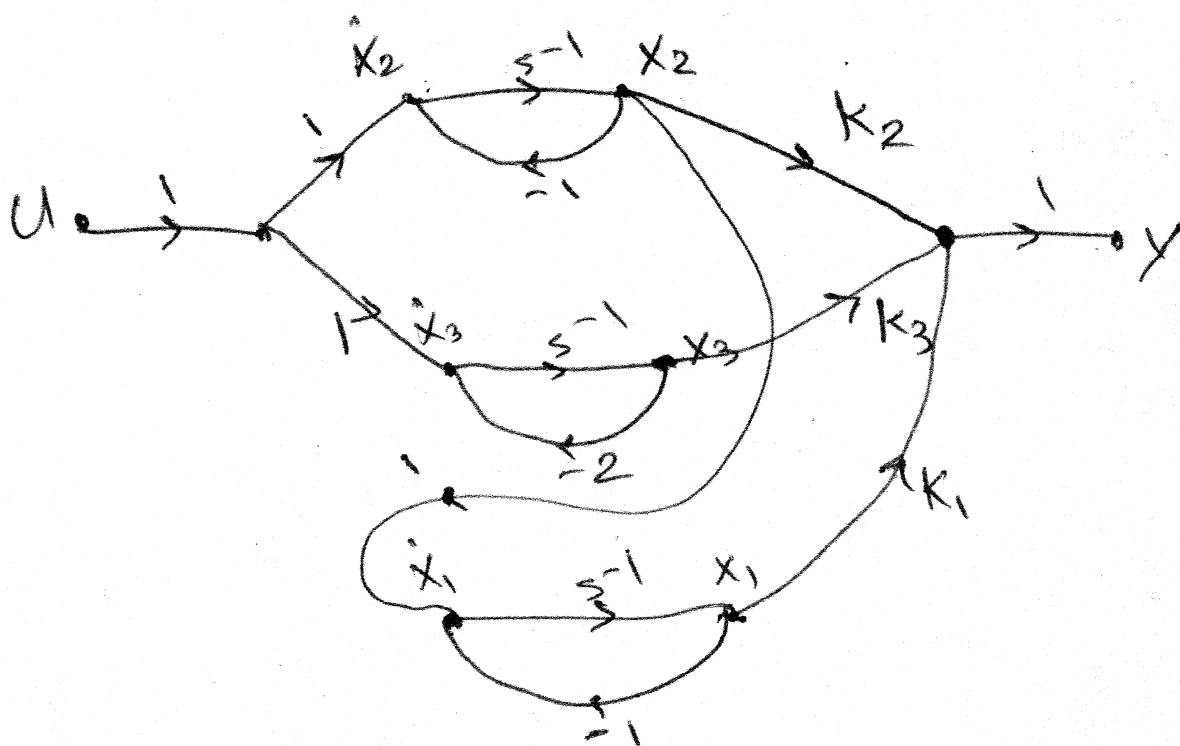
$$X_2 = \frac{u}{(s+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{X}_1 = -X_1 + X_2}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

مدرست کا نوٹس پر دین

علیحدہ سے بنیے



مثال: مدارات حالت را با روش تجزیه سوارای بنویسید.

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)^2 (s+2)^2} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{-3}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)^2}$$

$$\Rightarrow X(s) = \underbrace{\frac{U}{(s+1)^2}}_{X_1} - 3 \underbrace{\frac{U}{(s+1)}}_{X_2} + 3 \underbrace{\frac{U}{(s+2)^2}}_{X_3} + 3 \underbrace{\frac{U}{(s+2)}}_{X_4}$$

$$X_1 = \frac{U}{(s+1)^2} \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \dot{X}_1 = -X_1 + X_2$$

$$X_2 = \frac{U}{(s+1)}$$

$$X_3 = \frac{U}{(s+2)^2} \Rightarrow \frac{X_3}{X_4} = \frac{1}{s+2} \Rightarrow \dot{X}_3 = -2X_3 + X_4$$

$$X_4 = \frac{U}{s+2}$$

$$X_2 = \frac{U}{s+1} \Rightarrow \dot{X}_2 = -X_2 + U$$

$$X_4 = \frac{U}{s+2} \Rightarrow \dot{X}_4 = -2X_4 + U$$

درست کار نشده چون

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$y = X_1 - 3X_2 + 3X_3 + 3X_4$$

ص ۱۸-۱

شکل: تابع انتقال زیر لاپلاس تجزیه موهایی تجزیه نمود، رسیدیم به حالت دنیا می بینیم

$$\frac{C}{R} = \frac{s+1}{(s^2+s+1)(s+2)} = \frac{As+B}{s^2+s+1} + \frac{C}{s+2}$$

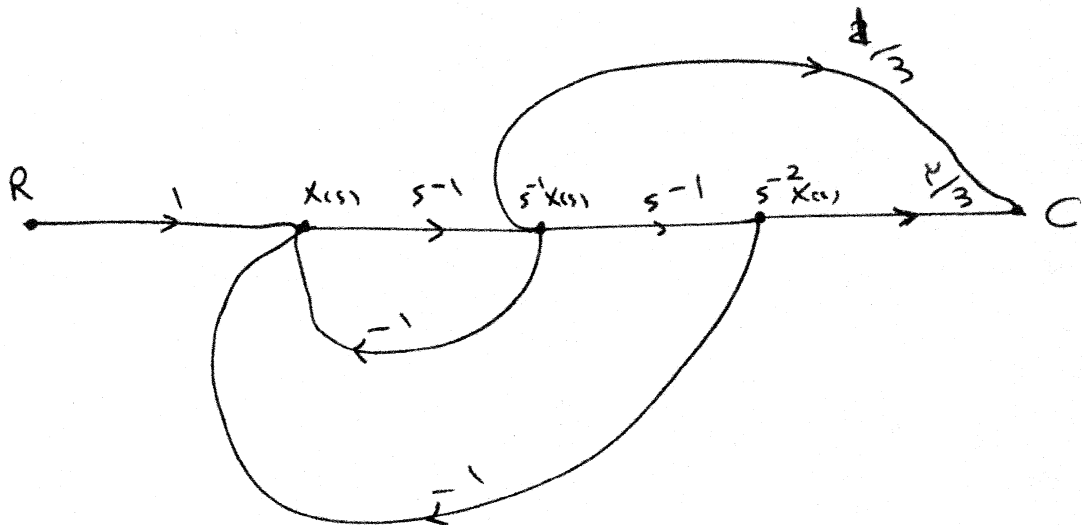
$$= \frac{(A+C)s^2 + (2A+B+C)s + 2B+C}{(s^2+s+1)(s+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B+C=1 \\ 2B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{2}{3} \\ C=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{1}{3}s + \frac{2}{3}}{s^2+s+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+2} = \frac{1}{3} \frac{s+2}{s^2+s+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+2}$$

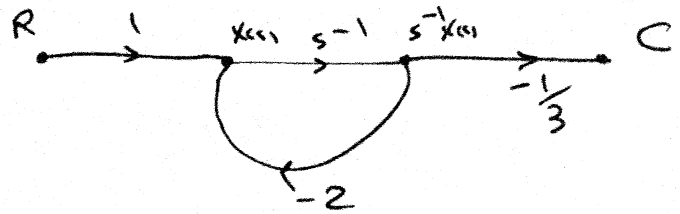
$$\frac{C}{R} = \frac{1}{3} \frac{s+2}{s^2+s+1} = \frac{1}{3} \frac{s^{-1} + 2s^{-2}}{1 + s^{-1} + s^{-2}} \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{3} s^{-1} X(s) + \frac{2}{3} s^{-2} X(s) \\ X(s) = R - s^{-1} X(s) - s^{-2} X(s) \end{cases}$$

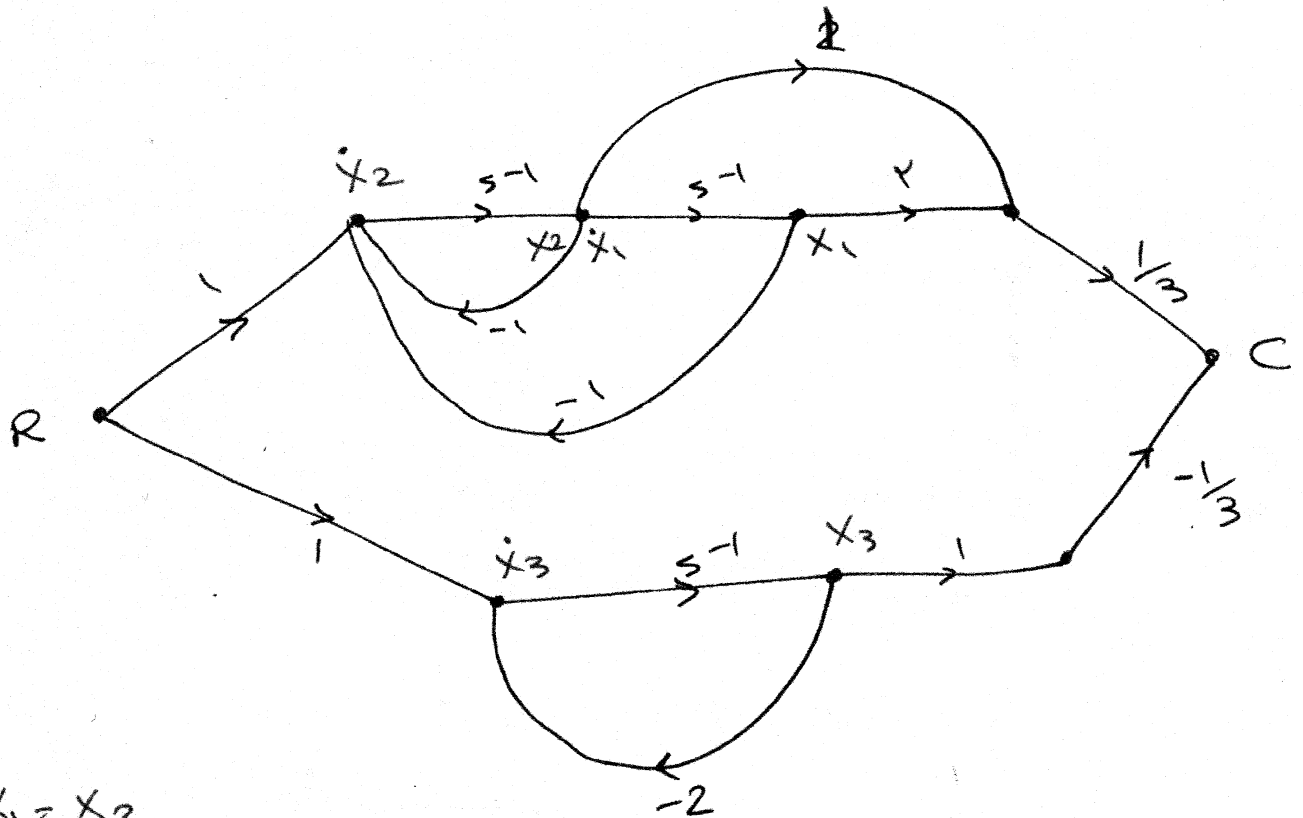


$$\frac{1 \times -2}{C/R} = -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{s+2} = -\frac{1}{3} \frac{s^{-1}}{1+2s^{-1}} \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$\begin{cases} C = -\frac{1}{3} s^{-1} X(s) \\ X(s) = R - 2s^{-1} X(s) \end{cases}$$



سید: مولد کردن داینامیک ها داریم:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = R - x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = R - x_3 \end{cases}$$

معادلات

$$C = \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3$$

$$A^R = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ بار}}$$

رتبه ماتریس: ماتریس A دارای رتبه R است اگر بتوان یک زیرماتریس $R \times R$ (بزرگترین مقدار ممکن برای R) یافت که دترمینان $\neq 0$ آن غیر صفر بوده و در نتیجه R از A بزرگتر از A یا $R > n$ صواب نیست.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R=2 \Rightarrow M_{2 \times 2} = A, |M| \neq 0$$

$$M_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, |M| \neq 0 \Rightarrow R=3$$

* رتبه ماتریس ۳ است.

نکته: دترمینان M_{ij} از ماتریس A که سطر i و ستون j حذف شده است.

به عبارت دیگر minor مربوط به عنصر a_{ij} می باشد.

نکته: دترمینان M_{ij} $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ نام عامل یا cofactor عنصر a_{ij} می باشد.

نکته: $transpose$ یک ماتریس را تعویض سطر و ستون آن می سازد.

نکته: Adjoint یا الحاقی یک ماتریس A ، سیران یافتن هم عامل های A است و با جابجایی کردن ماتریس حاصل به یک I می رسد.

$$A \times \text{Adj}(A) = |A| \times I$$

$\downarrow$
 ماتریس هم عامل
 دگرشیان A

مثال) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$|A| = 1(3 - 0) - 2(-9 + 2) + 0 = 17$$

$$\Rightarrow |A| = 3 - 0 + 0 - (-18 + 0 + 0) = 17$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

مثال ۲۱

$$A \times \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} = 17 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: معکوس ماتریس A را A^{-1} نشان می‌دهیم و داریم:

$$A A^{-1} = I \rightarrow A^{-1} = \frac{I}{A} = \frac{|A| I}{|A| A} = \frac{A \text{adj}(A)}{|A| A}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|}$$

تأیید این شرط معکوس پذیر است $|A| \neq 0$

نکته: مقادیر ویژه یک ماتریس $A_{n \times n}$ ریشه های معادله مشخصه

$$|sI - A| = 0 \text{ می باشد.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -11 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 11 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |sI - A| = s(s^2 + 4s + 11) + 4(1 - 0) = s^3 + 4s^2 + 11s + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \\ s_3 = -3 \end{cases}$$

۲۲

بردارهای ویژه: هر بردار ویژه q_i به ابعاد $n \times 1$ مربوط به مقدار ویژه λ_i برداری است که در رابطه:

$$(S_i I - A) q_i = 0$$

صدق کند.

مثال) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$SI - A = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 2 & S+3 \end{bmatrix} \rightarrow |SI - A| = S(S+3) + 2 = S^2 + 3S + 2 = (S+1)(S+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 = -1 \\ S_2 = -2 \end{cases}$$

$$S_1 = -1 \Rightarrow (-I - A) \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -q_{11} - q_{12} = 0 \\ 2q_{11} + 2q_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_{11} = -q_{12} \Rightarrow q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = -2 \Rightarrow (-2I - A) \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2q_{21} - q_{22} = 0 \\ 2q_{21} + q_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_{22} = -2q_{21} \Rightarrow q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

* هر ضربی از یک بردار ویژه، نیز بردار ویژه است.

۲۳

آرنبی مقادیر دیگر به تکرار باشد، بر نایست بر درهای دیگر که آنجا داریم:

$$\begin{cases} (\lambda_j I - A) P_1 = 0 \\ (\lambda_j I - A) P_2 = -P_1 \\ \vdots \\ (\lambda_j I - A) P_m = -P_{m-1} \end{cases}$$

* فرض کنیم λ_j به شکل
 m به تکرار باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |5I - A| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 5-2 \end{vmatrix}$$

$$= 5^3 - 25^2 + 85 = 5(5-4)(5-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow (\lambda_1 I - A) P_1 = 0 \Rightarrow (2I - A) P_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2P_{11} - 4P_{21} + 2P_{31} = 0 \\ -P_{11} + 2P_{21} - 2P_{31} = 0 \\ -3P_{11} - 2P_{21} - 2P_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{11} = 2, P_{21} = -1, P_{31} = -2$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_4 I - A) P_2 = 0$$

$$(\lambda_4 I - A) P_4 = -P_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{14} \\ P_{24} \\ P_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{8}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{8}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{42}{\sqrt{29}} \\ -\frac{26}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{42}{\sqrt{29}} \\ -2 & -\frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{26}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}$$

تبدیل به ماتریس حالت :

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

آیا می توان یک سیستم غیر متغیر فازی را به یک سیستم متغیر فازی تبدیل کرد؟

$$\begin{cases} X = P \hat{X} \\ \dot{X} = P \dot{\hat{X}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$P \dot{\hat{X}} = A P \hat{X} + B U$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{X}} = \underbrace{P^{-1} A P}_{\hat{A}} \hat{X} + \underbrace{P^{-1} B}_{\hat{B}} U$$

$$Y = \underbrace{C P}_{\hat{C}} \hat{X} + \underbrace{D}_{\hat{D}} U$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{X}} = \hat{A} \hat{X} + \hat{B} U \\ Y = \hat{C} \hat{X} + \hat{D} U \end{cases}$$

اگر سیستم وجود داشته باشد به شکل متعارف فازی نیست ولی مائری K و K_1 در سیمانی غیر صفر باشد می توان آن را از طریق تبدیل Q به شکل متعارف فازی درآورد.

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

تبدیل کننده فیزی

اگر در میان K صفر نباشد، سیستم کنترل پذیر نیست ولی اگر $K \neq 0$ است سیستم کنترل پذیر است.

برای تبدیل سیستم کنترل پذیر به فرم متعارف فازی داریم:

$$Y = QX$$

$$X = Q^{-1}Y$$

$$\dot{Y} = Q \dot{X} = QAX + QBu = QAQ^{-1}Y + QBu(t)$$

$$\dot{Y} = A_1 Y(t) + B_1 u(t)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_1 A \\ \vdots \\ Q_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]^{-1}$$

به تعبیر دیگر Q_1 سطر آخر مائری K است.

مثال ٢

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_1 = [1 \quad -1]$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_1 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = Q A Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = Q B_2$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

$$X = P \hat{X}$$

ملاحظة: P غير صفرية

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = \hat{A} \hat{X} + \hat{B} U \\ Y = \hat{C} \hat{X} + \hat{D} U \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = P^{-1} A P, \hat{B} = P^{-1} B \\ \hat{C} = C P, \hat{D} = D \end{cases}$$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

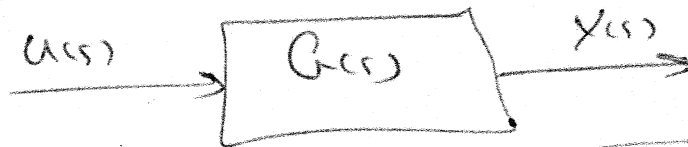
$$X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s)$$

في سبيل تبسيط (نظام التحكم)

۲۴ $Y(s) = C X(s) + D u(s)$

$$= C (sI - A)^{-1} B u(s) + D u(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = [C (sI - A)^{-1} B + D] u(s)$$



$$\boxed{C (sI - A)^{-1} B + D}$$

* تابع سیمپل که سیستم را به یک سیستم مختلف معادلات تبدیل می‌کند

$$\hat{C} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} + \hat{D} = C (sI - A)^{-1} B + D$$

$$C P (sI - P^{-1} A P)^{-1} P^{-1} B + D$$

$$P (sI - P^{-1} A P)^{-1} P^{-1} = (sI - A)^{-1}$$

$$(P (sI - P^{-1} A P) P^{-1})^{-1} = (P sI P^{-1} - P P^{-1} A P P^{-1})^{-1}$$

$$A B^{-1} A^{-1} = (A B A^{-1})^{-1} = (sI - A)^{-1}$$

$$(A B A^{-1})^{-1} = \frac{I}{A B A^{-1}} = A B^{-1} A^{-1} \Rightarrow A B A^{-1} A B^{-1} A^{-1} = I$$

$$\text{تابع سیمپل } G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$

$$= C \frac{\text{Adj}(sI - A)}{|sI - A|} B + D$$

* قطب‌های تابع سیمپل همان ریشه‌های درجه‌ی اول $|sI - A|$ هستند.

* مقادیر ویژه ماتریس A همان قطب‌های تابع سیمپل هستند.

۲۸
 + آیا می توان ماتریس تبدیل P و چنان انتخاب کرد که سیستم تبدیل به صورت
 قطری درآید؟

$$\begin{aligned} X &= P \hat{X} \\ \dot{X} &= P \dot{\hat{X}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{X}} = A \hat{X} + B u \\ Y = C \hat{X} + D u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{X}} = \Lambda \hat{X} + \hat{B} u \\ Y = \hat{C} \hat{X} + D u \end{cases}$$

$$\Lambda = P^{-1} A P$$

ماتریس قطری

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n]$$

بردارهای دیگر ماتریس A

اگر ماتریس A نرم مقارن فازی داده شده باشد، نگاه بایست کردن
 آنها و قرار دادن در ماتریس همان می توان ماتریس مودال P را پیدا کرد

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

ماتریس مودال

فاز می‌کارد جردن: در هر نوبت وقتی است که مفادله صفحه است ۲۵
تکراری نه داشته باشد. اگر تکراری داشته باشیم آنرا با ۱
به نرم جردن دو می‌کنیم:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 \\ & & & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

به ازای هر λ تکراری، معادله ۱ برای λ را می‌نویسیم:

(مثال) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -11 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

۳-۴

(مثال)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -9 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{ در مرتبه}$$

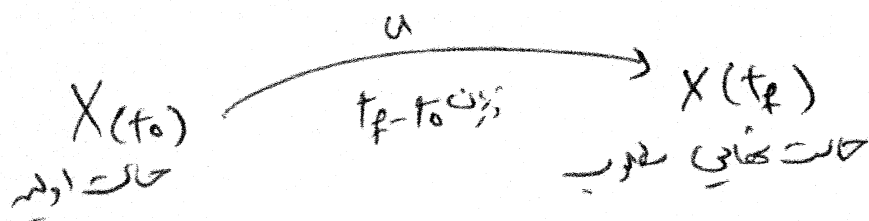
$$P = [P_1 \ P_2 \ P_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{7} & -\frac{22}{49} \\ -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{46}{49} \end{bmatrix}$$

در جهت بردارها
از چپ به راست

$$\Rightarrow \Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ فاجردن}$$

کنترل پذیری: حالت x در صورتی کنترل پذیر است که یک ورودی وجود داشته باشد که این حالت را از حالت اولیه $x(t_0)$ به یک حالت $x(t_f)$ در مدت زمان مسیح $t_f - t_0$ برسد.

اگر کلیه حالت های یک سیستم کنترل پذیر باشند، آنوقت آن سیستم کنترل پذیر است. اگر حتی یک حالت کنترل پذیر نباشد، آن سیستم کنترل پذیر نخواهد بود.



قضیه: شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری یک سیستم اینست که ماتریس S معکوس پذیر باشد یا به عبارتی S ناسیگما باشد.

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

سیستم کنترل پذیر است $\Rightarrow |S| \neq 0$

* روش دیگر این است که ابتدا سیستم را قطب و زیمنه بنویسیم، کردن به ماتریس ضرب $u(B)$ - کنترل پذیری را تحویل کنیم. اگر آرایه های B به ازای هر مقدار ویژه، متناظر غیر صفر باشد، یعنی یکی حالت کنترل پذیر است.

* اگر آرایه های صداره مشخصه تکراری باشند، بایستی فرآیند جردن را به دست آوریم. پس بنویسیم به آرایه ای که در B متناظر با سطوح آخر بلوک جردن داریم. اگر این آرایه غیر صفر باشد، سیستم کنترل پذیر است.

* همانگونه که می دانیم برای تبدیل یک سیستم به فرم قطبی، بایستی ماتریس صردال P را تشکیل داد و رسید خواهیم داشت:

$$\Lambda = P^{-1}AP$$

که Λ ماتریس قطبی است.

ماتریس صردال P از کنار هم قرار گرفتن بردارهای ویژه، متناظر با مقادیر ویژه A حاصل می گردد.

* آسانترین راه برای بدست آوردن بردارهای ویژه، عبارتست از:

به ازای هر λ که در رابطه $\det(A - \lambda I) = 0$ قرار می دهیم و معادله $P_i = \text{adj}[A - \lambda I]$ غیر صفر بردار ویژه مستقل یکی λ خواهد بود.

۳۴) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$[A - \lambda_i I] = \begin{bmatrix} -2 - \lambda_i & 1 \\ 0 & -1 - \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{adj}[A - \lambda_i I] = \begin{bmatrix} -1 - \lambda_i & -1 \\ 0 & -2 - \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \text{adj}[A - \lambda_1 I] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \text{adj}[A - \lambda_2 I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یعنی به سبب حالت اول هیچ ورودی ندارد و در نتیجه سیستم کنترل غیر نیت.

مثال ۳۳

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

روش اول

$$S = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |S| = 0 \Rightarrow \text{سیستم کنترول پذیر نیست}$$

روش دوم

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \hat{P}^{-1} A \hat{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \hat{P}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{سیستم کنترول پذیر نیست}$$

مثال ۳۴

$$\ddot{c} + 2\dot{c} + c = \dot{u} + u$$

روش اول

$$\begin{aligned} c &= x_1 \\ x_2 &= \dot{c} - u \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

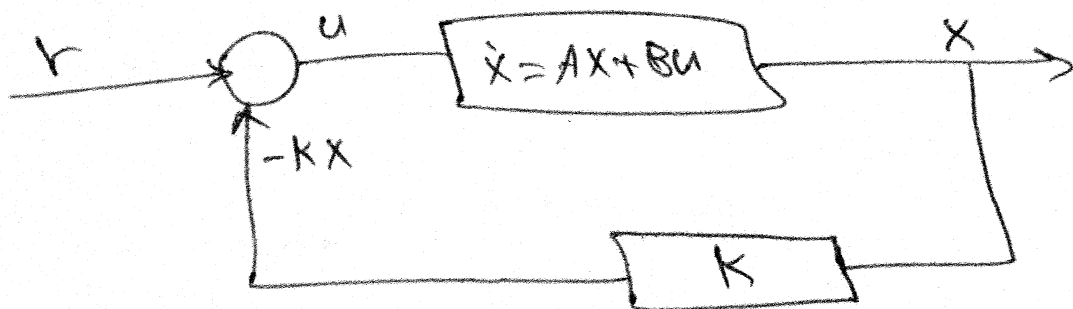
$$\Rightarrow S = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |S| = 0 \Rightarrow \text{سیستم کنترول پذیر نیست}$$

$$(s^2 + 2s + 1)C(s) = (s + 1)U(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ c = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow \text{سیستم کنترول پذیر است} \Rightarrow \text{میکشور قابل کنترول}$$

روش دوم

* سیستم $\dot{X} = AX + BU$ مقادیر ویژه و اشیاء در محل های مطلوب نیستند
 آیا می توان همواره ضریب حالت با بهره K را چنان یافت که مقادیر ویژه
 سیستم را به مقادیر مطلوب برساند؟



$$u = r - KX$$

$$\dot{X} = AX + BU = AX + B(r - KX)$$

$$\dot{X} = (A - BK)X + Br \rightarrow \text{مقادیر حالت سیستم حلقه بسته}$$

توجه: اگر سیستم کنترلی پذیر باشد، امکان جابجایی قطب های مطلوب
 (Pole Assignment) وجود دارد.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s-2 \end{vmatrix} = s^2 - 2s + 1 \Rightarrow s_1 = 1, s_2 = 1$$

ملاحظه: برای جابجایی ضریب K چنان باید که مقادیر ویژه سیستم در محلهای -1 و -2 قرار گیرند.
 سیستم کنترلی پذیر است $\Rightarrow |sI - A| \neq 0$ $s = [B \quad AB] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\hat{A} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-K_1 & 2+K_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |sI - \hat{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1+k_1 & s-2+k_2 \end{vmatrix} = s(s-2+k_2) + (1+k_1) \\ = s^2 + (k_2-2)s + (1+k_1) \\ = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_2 - 2 = 3 \\ 1 + k_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{مثال 2) } \dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$S = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(S) = 0 \Rightarrow S \text{ معکوس پذیر نیست.}$$

حال با انتخاب مناسب ضرایب حالت $-Kx$ ، ضرایب در معادله

۳- ع- وارد می شود.

$$\hat{A} = A - BK = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-k_1 & 1-k_2 \\ -k_1 & -1-k_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |sI - \hat{A}| = \begin{vmatrix} s+2+k_1 & k_2-1 \\ k_1 & s+1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$= (s+2+k_1)(s+1+k_2) - k_1(k_2-1) = 0$$

$$= s^2 + (2+k_1+1+k_2)s + ((2+k_1)(k_2+1) - k_1k_2 + k_1) = 0$$

$$= s^2 + (k_1+k_2+3)s + (2k_2+2+k_1k_2+k_1) = (s+3)(s+4) = s^2 + 7s + 12$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 4 \\ 2k_2 + 2k_1 &= 10 \\ 2k_2 + 4 &= 10 \Rightarrow k_2 = 3 \\ \text{---} k_1 &= 1 \\ k_1 + k_2 &= 5 \end{aligned}$$

نیز می توان

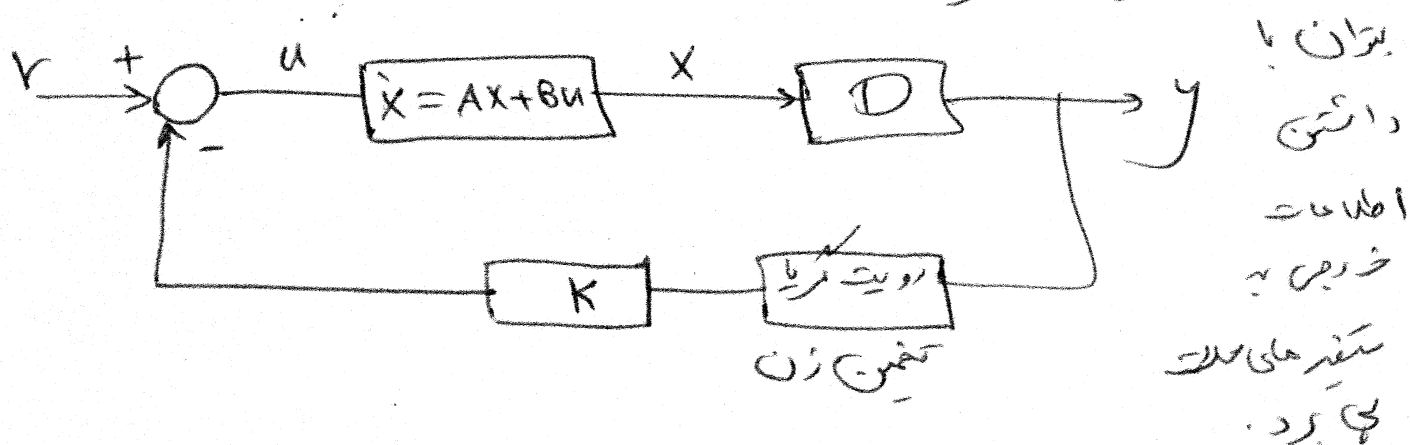
۳۴

- * قید ب های حالت منوط به اندازه گیری متغیرهای حالت است.
- * اگر تعداد متغیرهای حالت زیاد باشد، سنج های زیادی برای اندازه گیری قید مورد نیاز است.

اگر بتوانیم از روی خروجی، متغیرهای حالت را به این شکل اندازه بگیریم، در شکل فوق را نخواهیم داشت.

observability

اویت پذیری:
یک سیستم اویت پذیر است اگر



* آیا همواره می توان با داشتن خروجی، متغیرهای حالت را تخمین زد؟

متغیر دریت پذیری: شما را از کافی پس اویت پذیر بودن یک سیستم این است که M نا ویر باشد.

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

سیستم اویت پذیر است $\Rightarrow |M| \neq 0$

- سیستمی را اویت پذیر گوئیم که با داشتن بردار خروجی بتوان سینگل کنترل u را طرز انتخاب کرد که حالت اولیه سیستم (یا حالت دیگری) قابل حساب باشد.

مثال ۳۷

$$\dot{X}_1 = -2X_1 + 3u$$

$$\dot{X}_2 = -X_2$$

$$y = 2X_1$$

چون خروجی X_2 را به ای
ندارد پس X_2 را حذف می‌کنیم.

مثال) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = (s + 1)U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{(s+1)^2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad b_2 - a_2 b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n] x + B_n u$$

$$\frac{y}{u} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

ضابطه

$$\Rightarrow S = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{نا رتبه}$$

وجود عامل مشترک در صورت و مخرج کنترل پذیر است و چون
کنترل پذیر است.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{رتبه ۰} \rightarrow \text{کنترل پذیر نیست}$$

حال معادلات حالت به این شکل با به اوسع دیگر می ندریم:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \frac{dy}{dt} - u \end{cases} \rightarrow \dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} = x_2 + u$$

$$\frac{dy}{dt} = x_2 + u \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = \dot{x}_2 + \dot{u} = \dot{x}_2 + u - x_1 - 2(x_2 + u)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - u$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |S| = 0 \rightarrow \text{ویرده}$$

که سیستم دارنده کنترل پذیر حالت نیست.

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |M| \neq 0 \rightarrow \text{ناپذیرده}$$

که سیستم دارنده رویت پذیر است.

* بخاطر وجود قطب رصو مشترک، سیستم ممکن است کنترل پذیر و رویت پذیر نباشد.

* سیه رویت پذیر و کنترل پذیر خصوصیات معادلات حالت نشان می دهند.
سیستم است و معادلات حالت مختلف بیان کننده یک سیستم می توانند رویت پذیر و کنترل پذیر متفاوت داشته باشند.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 1 \ 0] X$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= -X_1 + u \rightarrow \text{کنترل پذیر و اویت پذیر} \\ \dot{X}_2 &= -2X_2 + u \rightarrow \text{کنترل پذیر و اویت ناپذیر} \\ \dot{X}_3 &= -3X_3 \rightarrow \text{کنترل ناپذیر و اویت پذیر} \\ \dot{X}_4 &= -4X_4 \rightarrow \text{کنترل ناپذیر و اویت ناپذیر} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{کل سیستم نه کنترل پذیر است} \\ &\text{و نه اویت پذیر} \end{aligned}$$

$$y = x_1 + x_3$$

* اگر سیستمی کنترل پذیر باشد، باید اویت پذیر است. (حتی اگر ناپایدار باشد)
 * اگر سیستمی کنترل پذیر نباشد می تواند پایدار نیز باشد به شرطی که ورودی های ناپایدار در آن - کنترل پذیر باشند.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \rightarrow \begin{aligned} &\text{سیستم ناپایدار است و یک قطب} \\ &\text{سمت راست دارد ولی کنترل پذیر است} \\ &\text{شیرهای } u \text{ کاملاً غیر صفر هستند} \end{aligned}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \rightarrow \begin{aligned} &\text{این سیستم کنترل ناپذیر است و} \\ &\text{ناپایدار است ولی پایدار نیز می باشد} \end{aligned}$$

شیرایه ورود ناپایدار (X_2) و اویت، است یعنی ورود ناپایدار، کنترل پذیر است.

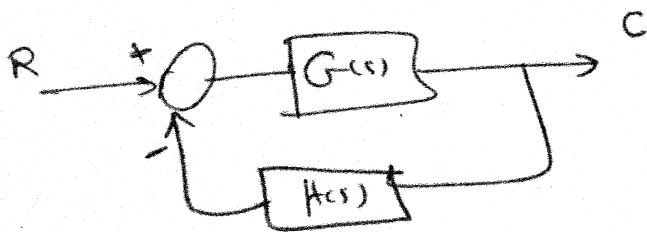
پایداری (stability):

- یکی از مهم‌ترین صفات عملکردی یک سیستم، پایداری است.

- پایداری BIBO (Bounded-Input-Bounded-output) یعنی اینکه به ازای ورودی محدود و کرانه‌دار، خروجی محدود و کرانه‌دار حاصل شود.

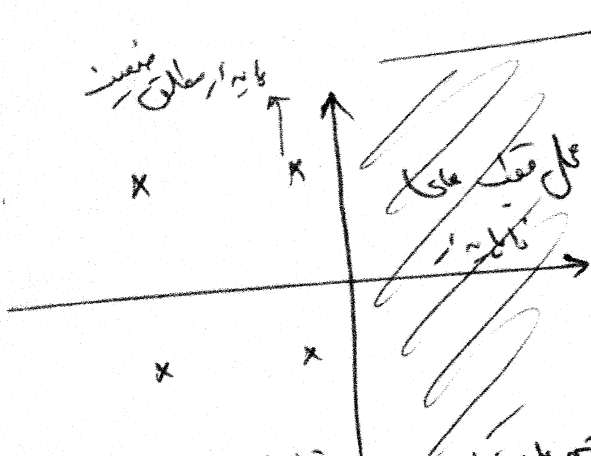
- پایداری مجانبی: یعنی به ازای اصل یک ورودی محدود و کرانه‌دار، خروجی به ازای $t \rightarrow \infty$ خطای $e(t) \rightarrow 0$ میل کند و حالت گذرا در t_{200} صفر شود.

- اگر قطب‌های یک سیستم، همگی در سمت چپ صفحه مختلا S باشند (سمت چپ محور σ)، آنگاه سیستم پایدار است و اگر حتی یک قطب در سمت راست محور σ باشد، سیستم ناپایدار خواهد بود.



$$T(s) = \frac{C}{R} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

ریشه‌های معادله $1 + GH = 0$ قطب‌های سیستم به حساب می‌آید.



پایداری نسبی: محل نسبی قطب‌ها در نیم صفحه سمت چپ S ، هر چه دورتر از محور σ باشد، سیستم پایدارتر است و پایداری نسبی بیشتری دارد.

پایداری مطلق: یعنی جلور مطلقاً خفیف شود که سیستم پایدار است یا ناپایدار؟

ص ۷۴
سیتم بایدها شیای: اگر یک یا چند قلب ساده با هم نبندند، روی محور موهومی

(محور حقیقی) باشند و سایر قلبها سمت چپ قرار بگیرند و گفتا. یا رخ بصورت
نوسانات سینوسی نامیده خواهد بود که به بایدها شیای معروف است.

سیتم سینیم فاز (کشین فاز): اگر تمام منوها و قلبهای با هم نبندند سیتم درست چپ
محور حقیقی باشند. آن سیتم می بینم فاز خوانده می شود، یعنی در مقایسه با توابع نبند
سیتمهای دیگر یادمانه یکسان، دارای کمترین فاز خواهد بود.

اگر سیتم به اقل یک قلب یا صفر در نیم راست صفحه s داشته باشد، سیتم را
نامینیم فاز ناصند.

روشهای تشخیص بایدها شیای سیتم ← مسیر بایدها شیای هورویتز

← روش مکان هندسی ریشه ها

← روش منحنی نایکوئیست

← روش منحنیهای بودی

نوٹ -

روش هورویتز: Roath-Harwitz

سیتمهای توان بدون حل معادله

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

به وجود ریشه های s در سمت راست صفحه s پی برد؟

جاسیر رات - هورویتز می توان به راحتی به این سوال پاسخ داد.

۴۲
 قضیه: شرط لازم برای اینکه همه ریشه های معادله صفحه $P(s)$ سمت چپ محور s باشند این است که تمام ضرایب $P(s)$ نامنفرد هم علامت باشند. اگر بین ضرایب تغییر علامت رخ دهد، به تعداد تغییر علامت ها، قطب در سمت راست صفحه s وجود داشته و ریشه آرایه راست.

شکل جدول هورویتز:

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	$A = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$B = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$C = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	
s^{n-3}	$\frac{A a_3 - a_1 B}{A}$	$\frac{A a_5 - a_1 C}{A}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	



در ستون اول جدول هورویتز،
 اعداد با علامت نامنفرد هم علامت
 باشند. در غیر این صورت به تعداد
 تغییر علامت ها، قطب در سمت راست
 داریم.

$$(5-2)(5+1)(5-3) = 5^3 - 65^2 + 5 + 6 = 0$$

از این به راحتی می توان نتیجه این سیستم نامیده است چرا که شرط لازم برای رانندگی و ضرایب معادله صحیح، تغییر عدم است (دارد) و دو تغییر عدم است (دارد) و ۲ قلب درست است داریم.

5^3	۱	۱
5^2	-۶	۶
5^1	$\frac{2}{5}$	۰
5^0	۶	۰

↓
دو تغییر عدم است (دارد)
سیستم نامیده است.

معادله	$25^4 + 5^3 + 35^2 + 55 + 1 = 0$	→	شرط لازم برای رانندگی
5^4	۲	۳	۱۰
5^3	۱	۵	۰
5^2	-۷	۱۰	۰
5^1	$\frac{4}{5}$	۰	۰
5^0	۱۰	۰	۰

↓

شرط کافی برای رانندگی

↓
سیستم نامیده است با درجه کمتر است.

$$\varepsilon \varepsilon^0 \quad 3S^V + 9S^4 + 4S^0 + \varepsilon S^2 + 7S^3 + 18S^2 + 4S + 4 = 0$$

S^V	3	4	✓	2
S^4	9	ε	1	4
S^0	ε, 9, 7	ε, 3, 2	0	0
S^2	-ε, 3, ε	1	4	0
S^3	12, 9, 3	-4	0	0
S^2	2, 1, 3	4	0	0
S^1	-19, 20	.	0	.
S^0	4	.	0	.

↓
سهم نایب ارات.

$$(نایب) \quad 2S^0 + 4S^2 + 3S^3 + \varepsilon S^2 + 3S + 9 = 0$$

S^0	2	3	3
S^2	4	ε	9
S^3	10	0	0
S^2	ε	9	0
S^1	$-\frac{9}{\varepsilon}$	0	0
S^0	9	.	.

* برای سادگی عملیات.

همراه می توان اعداد نایب

در یک عدد مثبت ضرب

نمایم نمود

تاللات خاص هور و تیز :

۱) وجود کب عنصر صفر در ستون اول : در این صورت کن را عدد کوچک

ع (نسبت یا منفی) جایگزین صفر در اولاده من دهیم .

$$S^3 - 3S + 2 = 0$$

S^3	۱	-۳	
S^2	۴	۲	$\frac{-۳ع - ۲}{ع} \rightarrow -\frac{۲}{ع}$
S^1	$\frac{-۳ع - ۲}{ع}$	۵	
S^0	۲	۵	

همواره بقصیر عدالت در
ستون اول داریم بدینیم نایه اراست .

$$S^5 + ۲S^4 + ۳S^3 + ۶S^2 + ۵S + ۳z$$

S^5	۱	۳	۵	
S^4	۲	۶	۳	
S^3	۴	$\frac{۷}{۲}$	۵	
S^2	$\frac{-۴ع - ۷}{ع}$	۳	۵	$-\frac{۷}{ع}$
S^1	$\frac{-۴۹}{۲ع} - \frac{۳ع}{۲ع}$	۵	۵	
S^0	$-\frac{۷}{ع}$	۵	۵	عدد +

دارد
مادرله در درستی درست است

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

اینجا باید عکس می شود، علامت آنجا تغییر نمی کند.

$$s^5 + 4s^2 + 3s^3 + 4s^4 + 5s + 3z_0$$

$$s \rightarrow \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s^5} + \frac{4}{s^2} + \frac{3}{s^3} + \frac{4}{s^4} + \frac{5}{s} + 3z_0$$

$$\Rightarrow 1 + 4s + 3s^2 + 4s^3 + 5s^4 + 3s^5 z_0$$

$$\Rightarrow 3s^5 + 5s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 4s + 1 z_0$$

$$s^5 \quad 3 \quad 4 \quad 4$$

$$s^4 \quad 5 \quad 3 \quad 1$$

$$s^3 \quad \frac{11}{5} \rightarrow 2 \quad \frac{7}{5} \rightarrow 1 \quad 0$$

$$s^2 \quad \frac{4}{3} \rightarrow 2 \quad 1 \rightarrow 3 \quad 0$$

$$s^1 \quad -\frac{5}{3} \quad 0 \quad 0$$

$$s^0 \quad 3 \quad 0 \quad 0$$

↓
نتیجه

حالت خاص دوم: حالتی که در آن، یک سطر کامل جدول مورد سطر صفر در درجه ۴

در این حالت با حذف این سطر و استفاده از ضرایب سطر اول
تبدیل می‌شود. سپس از آن مشتق می‌گیریم. در نهایت ضرایب جمله‌ای مشتق
را جایگزین سطر صفر، وارد داریم و جدول را ادامه می‌دهیم.

مثال $(s-1)^2(s+2)(s+1) = s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$

$$s^4 \quad 1 \quad -3 \quad 2$$

$$s^3 \quad 1 \quad -1 \quad 0$$

$$s^2 \quad -2 \quad 2 \quad 0$$

$$s^1 \quad 4 \quad 0 \quad 0$$

$$s^0 \quad 2 \quad 0 \quad 0$$

مقدار رگلی $A(s) = -2s^2 + 2$

جایگزینی ضرایب $\frac{dA(s)}{ds} = -4s$



در تغییر عدالت ← دو تک

مشتقات

* وجود ریشه‌های حقیقی متقارن نسبت به صفر می‌تواند به سطر یکا ما منفر
بیانجامد.

$$(s^2-1)(s^2-2)(s+5) = 0$$

$$s^5 + 5s^4 - 3s^3 - 15s^2 + 2s + 10 = 0$$

s^5	1	-3	2
s^4	5	-15	
s^3	4	-4	
s^2	$\frac{-15}{4} = -\frac{15}{4}$	$\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$	
s^1	$-\frac{1}{4}$		
s^0	2		

$$1. \xrightarrow{\text{گزی}} A(s) = 2s^2 - 15s + 1 = 0$$

$$= s^2 - 3s + 2 = 0$$

$$\leftarrow \frac{dA(s)}{ds} = 2s - 15 = 0$$

$$2s^2 - 3s = 0$$

دورترین است.

$$s^5 + 2s^4 + 15s^3 + 15s^2 + 7s + 2 = 0$$

s^5	1	1	7
s^4	2	1	2
s^3	4	4	0
s^2	2	2	0
s^1	1	0	0
s^0	2	0	0

$$s^2 + 1 = 0 \rightarrow s = \pm j$$



$$\rightarrow A(s) = 2s^2 + 2 = 0$$

$$\leftarrow \frac{dA(s)}{ds} = 4s$$

* ریشه های سری محور حقیقی سواً تماماً منفی نخواهد بود.

نکته: ضریب های اصلی (مشاره مستقیم) همواره بر مداره کلی بخشیده است. یعنی ریشه مداره کلی، بخشی از ریشه های مداره مستقیم خواهند بود.

$$S^4 + 4S^3 + 12S^2 + 14S + 41S^2 + 34S + 72 = 0$$

$$S^4 \quad 1 \quad 12 \quad 41 \quad 72$$

$$S^3 \quad 41 \quad 144 \quad 349 \quad 0$$

$$S^2 \quad 181 \quad 344 \quad 729 \quad 0$$

$$S^1 \quad 18 \quad 28 \quad 0 \quad 0$$

$$S^0 \quad 2 \quad 9 \quad 0 \quad 0$$

$$S^1 \quad -\frac{5}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

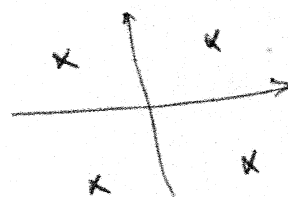
$$S^0 \quad 9 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

ریشه دلت

$$\rightarrow A(s) = S^2 + 4S^2 + 9 = 0$$

$$= (S^2 + \sqrt{2}S + 3)(S^2 - \sqrt{2}S + 3)$$

$$\leftarrow \frac{dA(s)}{ds} = 4S^3 + 18S$$



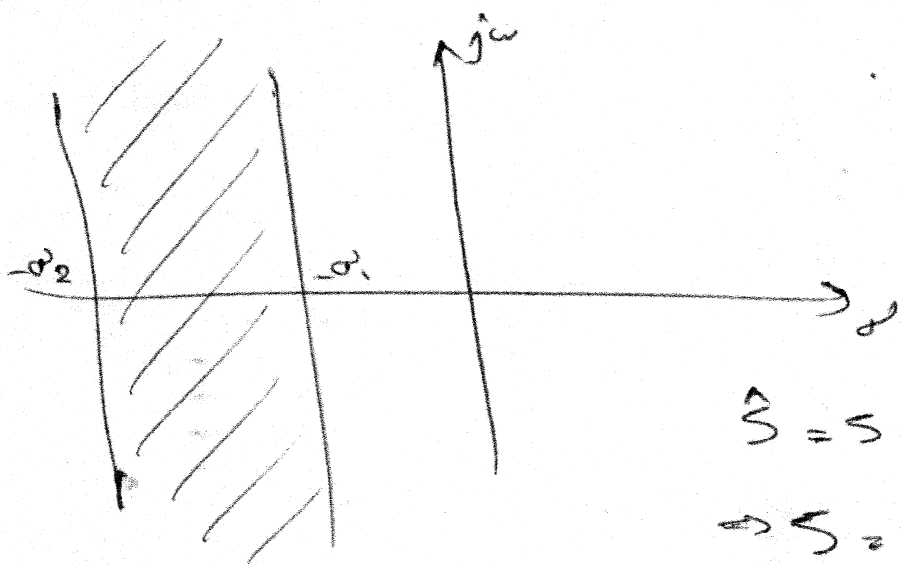
* ریشه های ستارن نسبت به هر دو محور نیز به یک سطح ناماف صفر می انجامند

نکته: سطح ناماف صفر فقط در سطحی با توان فرد اتفاق افتاده در نتیجه سادله
کلی همواره از درجه زوج خواهد بود.

نکته: اگر بعد از استفاده از سادله کلی، هیچ تغییر علامتی در ستون اول وجود نداشته
همه ریشه های حینجه ای کلی حتماً روی محور سن قرار دارند و گرنه ممکن است
دور ریشه حقیقی با علامت مخالف و اندازه برابر و با دو حقیق ریشه صفری
مزدوج وجود داشته باشند.

* آیا می توان فهمید که سازه ای چند ریشه در درون نوار محدود بین صفر و یک دارد؟

پایان: محورها های مختصات را یکبار به s - یکبار به s_2 - منتقل می کنیم و در هر بار، از طریق هوروتیز، که اد ریشه های سمت راست را به سمت چپ می کشد در نهایت از هم کم می کنیم.



$$\hat{s} = s + s_2$$

$$\Rightarrow s = \hat{s} - s_2$$

مثال (به ازای چه مقدار k ، همه ریشه ها در نیم صفحه چپ هستند) پایدار؟

$$s^4 + s^3 + s^2 + s + k = 0$$

s^4	1	1	k
s^3	1	1	0
s^2	$\frac{0}{0}$	k	0
s^1	$\frac{0-k}{0}$	0	0
s^0	k	0	0

همه ریشه $k > 0$ و هم ریشه $k < 0$

تغییر علامت در ستون اول

ظاهر می شود که سازه ناپایدار است.

ناپایدار است.

۵۰
 K در حوضه ناصیه ای باشد که به ریشه های معادله مشخصه زیر
 درست چپ صفت S باشد؟

$$S^3 + 3KS^2 + (K+2)S + \varepsilon = 0$$

$$S^3 \quad 1 \quad K+2$$

$$S^2 \quad 3K \quad \varepsilon$$

$$S^1 \quad \frac{3K^2 + 4K - \varepsilon}{3K} \quad 0$$

$$S^0 \quad \varepsilon \quad 0$$

$$3K^2 + 4K - \varepsilon > 0 \Rightarrow K \geq \frac{-4 \pm \sqrt{21}}{6} \rightarrow \begin{matrix} 1,528 \\ -2,528 \end{matrix}$$

سیر لازم است $K > 1,528$ باشد.

به ازای چه مقدار K یک سیستم نوسانی می شود؟
 - لازم است یک شرط منفرجه در معادله ایجاد شود و آن شرط نوسانی اینست که مماسی حاصل
 می شود.

در مثال بالا داریم:

$$K = 1,528 \Rightarrow \text{سیستم نوسانی است} \Rightarrow A(s) = 3KS^2 + \varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{-\varepsilon}{3 \times 1,528} = \frac{-\varepsilon}{4,584}$$

$$\Rightarrow S = \pm j 1,59$$

ص ۱-۵

مثال: به ازای چه مقادیر k سیستم ناپایدار است!

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -k & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -2 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 2 & k+s & s+1 \end{vmatrix}$$

$$\cancel{s+2}$$

$$s^2(s+1) + 4 + ks = s^3 + s^2 + ks + 4 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & k \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^1 & k-4 & 0 \end{array} \rightarrow k-4 > 0 \rightarrow \boxed{k > 4}$$

$$\begin{array}{ccc} s^0 & 4 & 0 \end{array}$$

$$s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = (s^2 + 1)^2(s + 1) \quad \text{فکتور}$$

$$\begin{array}{ccc} s^5 & 1 & 2 & 1 \end{array} \quad (s^2 + 1)^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} s^4 & 1 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow s^4 + 2s^2 + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \leftarrow 4s^3 + 4s$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow s^2 + 1 = 0 \rightarrow s = \pm j$$

$$\begin{array}{ccc} s^1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \leftarrow 2s$$

$$\begin{array}{ccc} s^0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

یک جفت ریشه مکرر در صورت وجود دارد و لذا ناپایدار است.